Posible solución del examen de Investigación Operativa de Sistemas de junio de 2008

Problema 1: (*3 puntos)*

Un juego consiste en lanzar al aire repetidas veces una moneda e ir anotando el número de caras y cruces que van apareciendo. Si el número de caras llega a superar en más de uno al número de cruces (por ejemplo, 4 caras y 2 cruces), el jugador A gana y termina el juego. Por el contrario, si el número de cruces llega a superar en más de uno al número de caras (por ejemplo, 3 caras y 5 cruces), el jugador B gana y termina el juego.

a) Matriz de transición y diagrama de transición de estados (DTE). Clasificar los estados y la cadena de Markov.

b) Hallar el número medio de lanzamientos de moneda que se realizan hasta que acaba el juego.

c) Si hasta el momento han salido 81 caras y 80 cruces sin que haya ganado nadie aún, ¿cuál es la probabilidad de que gane B?

Solución:

Apartado a):

Los posibles estados del juego son:

O: El juego todavía no ha terminado y el número de caras es igual al de cruces.

C: El juego todavía no ha terminado y ha salido una cara más que cruces.

X: El juego todavía no ha terminado y ha salido una cruz más que caras.

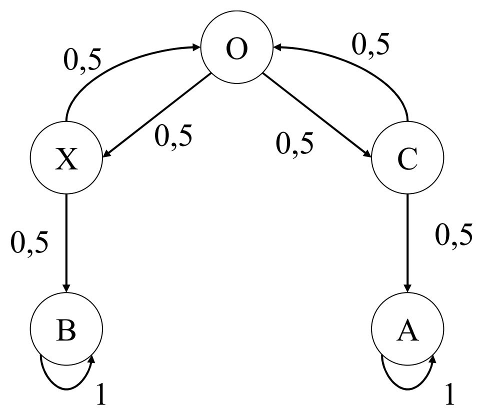
A: El juego ha terminado y ha ganado el jugador A.

B: El juego ha terminado y ha ganado el juegador B.

Por lo tanto, el conjunto de estados será: S={O, C, X, A, B}. La matriz de transición será la siguiente:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El DTE correspondiente es:



La clasificación de los estados será:
Transitorios: O, C, X
Recurrentes: A, B
Periódicos: ninguno
Absorbentes: A, B

La CM se clasifica como sigue. No es irreducible (debido a los conjuntos cerrados {A} y {B}), y por tanto no es recurrente, ni transitoria, ni periódica, ni aperiódica, ni ergódica. Sí es absorbente.

Apartado b):

Nos piden calcular el número medio de etapas que se estará en los estados transitorios O, C y X antes de la absorción, suponiendo que empezamos en el estado transitorio O∈S. Según la teoría de las cadenas de Markov absorbentes, este valor viene dado por la suma de los elementos (1,1), (1,2) y (1,3) de $(I–Q')^{-1}$.

Se observa que los elementos de S ya están ordenados como se requiere para hacer los cálculos, es decir, primero los estados transitorios y después los absorbentes. Por lo tanto la matriz *Q'* será la siguiente:

$$Q'=\begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz cuyos elementos necesitamos es la siguiente:

$$(I-Q')^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 1 & 0 \\ -0,5 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1,5 & 0,5 \\ 1 & 0,5 & 1,5 \end{pmatrix}$$

El número medio de etapas antes de la absorción será 2+1+1=4 etapas. Es decir, por término medio el juego acaba tras haber lanzado la moneda 4 veces.

Apartado c):

Nos piden calcular la probabilidad de acabar en el estado absorbente B∈S, suponiendo que estamos en el estado antes de la absorción, suponiendo que empezamos en el estado transitorio C∈S. Según la teoría de las cadenas de Markov absorbentes, este valor es el elemento (2,2) de la matriz fundamental $(I–Q')^{-1}R$, donde:

$$R=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$(I-Q')^{-1}R=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1,5 & 0,5 \\ 1 & 0,5 & 1,5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,75 & 0,25 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}$$

Así pues, la probabilidad pedida es 0,25.

<u>Problema 2</u>: (*3 puntos)*

En una red de ordenadores hay una impresora compartida. Los trabajos llegan con una tasa media de 2 trabajos por minuto, siguiendo un proceso de Poisson. La impresora imprime 20 páginas por minuto y el número medio de páginas por trabajo son 5. Entre un trabajo y el siguiente la impresora tarda 2 segundos de latencia. El tiempo de servicio sigue una distribución exponencial. Calcular:

a) Porcentaje del tiempo que la impresora está ocupada.
b) Longitud media de la cola.
c) Tasa de servicio que sería necesaria para que el tiempo medio en el sistema fuera inferior a 3 minutos.

Solución:

El sistema se puede modelar como una cola M/M/1. El tiempo medio entre llegadas es $1/\lambda$=0,5 minutos. Como cada trabajo tiene una media de 5 páginas, la impresora tardará una media de 5/20 minutos en imprimirlo, a lo que debemos sumar los 2 segundos=1/30 minutos que tiene de latencia en cada trabajo. Por lo tanto $1/\mu$=5/20+1/30=17/60 minutos. En tal caso, λ=2 trabajos/minuto, μ=60/17 trabajos/minuto, $\rho=\lambda/\mu$=34/60=17/30.

Apartado a):

Nos piden la probabilidad de que no haya 0 clientes en el sistema:

$$1-p_0=\rho=\frac{17}{30}$$

Es decir, la impresora está libre durante el 56,67% del tiempo, aproximadamente.

Apartado b):

Nos piden L_q:

$$L_q=\frac{\rho^2}{1-\rho}=\frac{\left(\frac{17}{30}\right)^2}{1-\frac{17}{30}}=\frac{17^2}{30^2\cdot\frac{13}{30}}=\frac{17^2}{30\cdot 13}=\frac{283}{390}\text{ trabajos}\approx 0{,}741026\text{ trabajos}$$

Apartado c):

Dejando constante λ=2, nos piden hallar el valor de μ para que W<3 minutos. Comenzamos expresando W en función de λ y μ, haciendo uso de las fórmulas que aparecen en el enunciado del examen (véanse al final de este documento):

$$W=W_q+\frac{1}{\mu}=\frac{L_q}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=\frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}+\frac{1}{\mu}=\ldots$$

$$\ldots = \frac{\lambda^2}{\mu^2 \lambda(1-\rho)} + \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu^2\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)} + \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu^2 \frac{\mu-\lambda}{\mu}} + \frac{1}{\mu} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} + \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda+\mu-\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\mu}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

Planteamos la inecuación:

$$W < 3 \Rightarrow \frac{1}{\mu-\lambda} < 3 \Rightarrow \ldots$$

Sustituimos el valor de λ y resolvemos la inecuación:

$$\ldots \Rightarrow \frac{1}{\mu-2} < 3 \Rightarrow 1 < 3(\mu-2) \Rightarrow 3\mu - 6 > 1 \Rightarrow 3\mu - 7 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu > \frac{7}{3} = 2{,}333 \text{ trabajos/minuto}$$

Es decir, se necesita una tasa de servicios μ mayor que 2,333 trabajos/minuto para que el tiempo de espera en el sistema caiga por debajo de los 3 minutos.

Problema 3: (*2 puntos)*

Una persona que sufre una deficiencia de hierro y vitamina B debe ingerir durante un determinado periodo de tiempo al menos 3000 mg de hierro, 2400 mg vitamina B-1, y 1800 mg de vitamina B-2. Existen dos comprimidos de vitaminas disponibles en las farmacias, la marca A y la marca B. Cada comprimido de la marca A contiene 50 mg de hierro, 20 mg de vitamina B-1, y 10 mg de vitamina B-2. Cada comprimido de la marca B contiene 15 mg de hierro, 20 mg de vitamina B-1, y 20 mg de vitamina B-2. Un comprimido de la marca A cuesta 10 céntimos, y de la de la marca B 15 céntimos.

a) Formule dicho problema como un problema de programación lineal.

b) Determine mediante el método gráfico la cantidad de píldoras de una y otra marca que debe comprar el paciente para cubrir sus requerimientos de hierro y vitaminas al menor costo.

Solución:

Apartado a):

El problema se puede resumir en la siguiente tabla:

	Marca A	Marca B	Requerimientos mínimos
Hierro	50 mg	15 mg	3000 mg
Vitamina B-1	20 mg	20 mg	2400 mg
Vitamina B-2	10 mg	20 mg	1800 mg
Costo por unidad	10 céntimos	15 céntimos	

Variables de decisión

- x_1 = cantidad de comprimidos de la marca A
- x_2 = cantidad de comprimidos de la marca B

Restricciones:

$50\,x_1 + 15\,x_2 \geq 3000$

$20\,x_1 + 20\,x_2 \geq 2400$

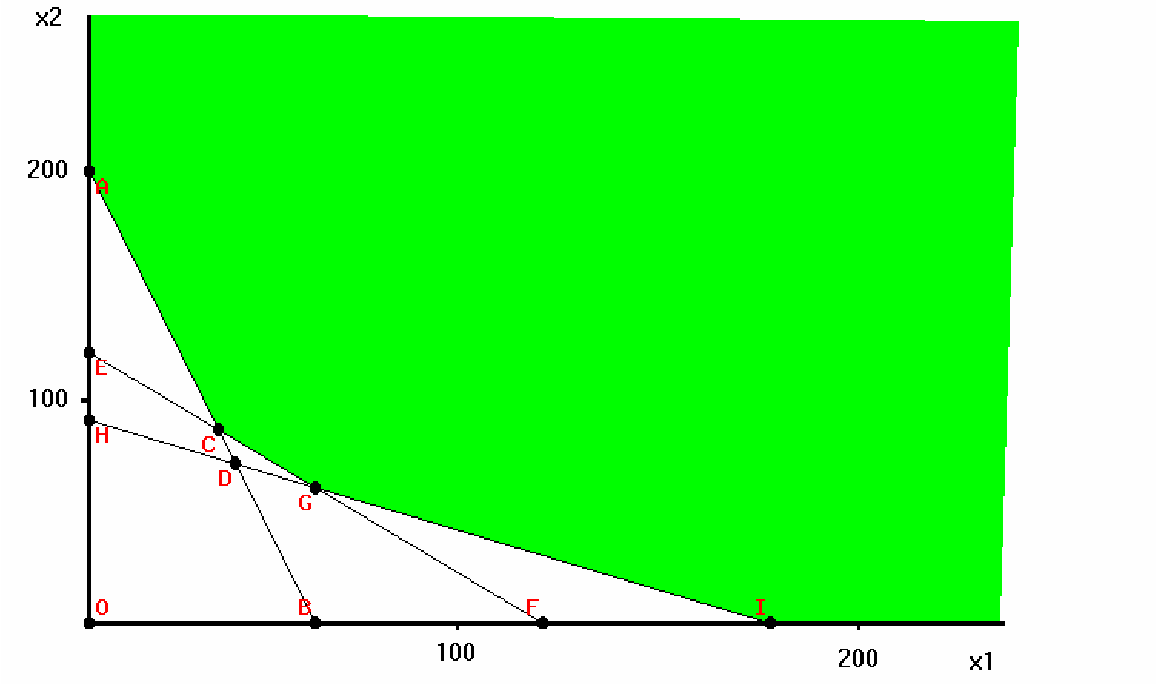
$10\,x_1 + 20\,x_2 \geq 1800$

Función objetivo que minimizar:

$f(x_1,x_2) = 10\,x_1 + 15\,x_2$

Apartado b):

La representación gráfica queda aproximadamente como sigue (nótese que la región factible es ilimitada):



La lista de puntos extremos es la siguiente (en rojo los no factibles, en blanco los factibles no óptimos y en verde el factible óptimo):

Punto	Coordenada x_1	Coordenada x_2	Valor F
O	0	0	0
A	0	200	3000
B	60	0	600
C	34.2857	85.7142	1628.5714
D	38.8235	70.5882	1447.0588
E	0	120	1800
F	120	0	1200

G	60	60	1500
H	0	90	1350
I	180	0	1800

Se observa por lo tanto que el punto G es la solución óptima de este problema (60 comprimidos de la marca A y 60 de la marca B), a un costo de 1500 céntimos = 15 €.

Problema 4: (*2 puntos)*

Resuelva el siguiente problema de programación lineal mediante el método del Simplex, indicando el tipo de solución(es) óptima(s) obtenida(s), si las hay:

Maximizar $x_1 + 4x_2$

Sujeto a:
$$2x_1 + 3x_2 \le 24$$
$$2x_1 + x_2 \ge 12$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Solución:

Pasando el problema a la forma estándar tenemos:

Maximizar $x_1 + 4x_2$

Sujeto a:
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad &= 24 \\ 2x_1 + x_2 \qquad - x_4 &= 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 & \end{aligned}$$

Observamos que hay una variable de exceso, x_4, por lo cual debemos aplicar el método de las dos fases. Introducimos la variable artificial, x_5, y el problema para la fase I es el siguiente:

Maximizar $-x_5$

Sujeto a:
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 24 \\ 2x_1 + x_2 \qquad - x_4 + x_5 &= 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 & \end{aligned}$$

La tabla inicial para la Fase I es la siguiente:

			0	0	0	0	-1
Base	c_b	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_3	0	24	2	3	1	0	0
P_5	-1	12	2	1	0	-1	1
		-12	-2	-1	0	1	0

Criterio de entrada: mín {-2, -1} = -2, luego entra x_1.
Criterio de salida: mín {24/2, 12/2} = 12/2, luego sale x_5.

La nueva tabla es la siguiente:

			0	0	0	0	-1
Base	c_b	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_3	0	12	0	2	1	1	-1
P_1	0	6	1	1/2	0	-1/2	1/2
		0	0	0	0	0	1

La tabla anterior es una de las tablas óptimas para la fase I (habría dos más, correspondientes a introducir en la base x_2 y x_4, respectivamente.

Utilizamos esta tabla para construir la primera tabla de la fase II:

			1	4	0	0
Base	c_b	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4
P_3	0	12	0	2	1	1
P_1	1	6	1	1/2	0	-1/2
		6	0	-7/2	0	-1/2

Criterio de entrada: mín {-7/2, -1/2} = -7/2, luego entra x_2.
Criterio de salida: mín {6/(1/2), 12/2} = 12/2, luego sale x_3.

La nueva tabla es la siguiente:

			1	4	0	0
Base	c_b	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4
P_2	4	6	0	1	1/2	1/2
P_1	1	3	1	0	-1/4	-3/4
		27	0	0	3/4	1/4

Esta tabla es óptima., y corresponde a la solución (3,6,0,0). Así, los valores óptimos del problema original son $x_1 = 3$ y $x_2 = 6$, y el valor óptimo de la función objetivo es 27. La solución óptima es única, ya que en la tabla final no hay variables no básicas que tengan un cero en la última fila.

FÓRMULAS DE TEORÍA DE COLAS:

M/M/1: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$; $p_n = \rho^n(1-\rho)$; $L_q = \dfrac{\rho^2}{1-\rho}$; $W(t) = e^{-t/W}$

$W_q(t) = \rho e^{-t/W}$

M/M/c: $\rho = \dfrac{\lambda}{c\mu}$; $p_0 = \left(\dfrac{c^c\rho^c}{c!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^{c-1}\dfrac{(c\rho)^n}{n!}\right)^{-1}$; $L_q = \dfrac{c^c\rho^{c+1}p_0}{c!(1-\rho)^2}$

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{(c\rho)^n}{n!}p_0, \text{ si } n = 0,1,\ldots,c \\ \dfrac{c^c\rho^n}{c!}p_0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

M/M/1 y M/M/c: $W = W_q + \dfrac{1}{\mu}$; $L_q = \lambda W_q$; $L = \lambda W$

M/M/1/k: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$; $p_n = \begin{cases} \dfrac{\rho^n(1-\rho)}{1-\rho^{k+1}}, \text{ si } \rho \neq 1 \\ \dfrac{1}{\mathrm{k}+1}, \text{ si } \rho = 1 \end{cases}$ $\lambda_{ef} = \lambda(1-p_k)$

$W = W_q + \dfrac{1}{\mu}$; $L_q = \lambda_{ef}W_q$; $L = \lambda_{ef}W$; $L = \begin{cases} \dfrac{\rho}{1-\rho} - \dfrac{(k+1)\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}}, \text{ si } \rho \neq 1 \\ \dfrac{k}{2}, \text{ si } \rho = 1 \end{cases}$

Redes de Jackson abiertas:

$$\lambda_{red} = \sum_{i=1}^{K}\gamma_i\ ; \quad L_{red} = \sum_{i=1}^{K}L_i\ ; \quad W_{red} = \frac{L_{red}}{\lambda_{red}}\ ; \quad V_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_{red}}$$

Redes de Jackson cerradas:

$$W_j(m) = \frac{1 + L_j(m-1)}{c_j\mu_j}; \qquad L_j(m) = m\frac{\lambda_j^* W_j(m)}{\sum_{i=1}^{K}\lambda_i^* W_i(m)}; \qquad \lambda_j(m) = \frac{L_j(m)}{W_j(m)};$$

$$L_j(0) = 0$$