

# Conjuntos y Sistemas Difusos

## (Lógica Difusa y Aplicaciones)

### 10. Bases de Datos Relacionales Difusas (BDRD): Estudio de la División Relacional Difusa



E.T.S.I. Informática

J. Galindo Gómez

#### Definición e Interés de la División

- **División Relacional:** Dada una relación  $R(A,B)$  y otra relación  $S(B)$ , donde **A** y **B** son **atributos simples o grupos de atributos**, la división  $R \div S$  representa una relación  $Q(A)$  con las tuplas (**a**) para las que existe una tupla (**a,b**) en  $R$  para cada tupla (**b**) de  $S$ .

#### – Ejemplo:

- **Relaciones** (tablas):
  - **Ventas** (Cliente, Cod\_Producto);
  - **Productos\_Tipo\_T** (Cod\_Producto);
- **Consulta:** “Recuperar los clientes que han comprado **TODOS** los Productos del Tipo **T**”  $\circledast$  **Ventas**  $\div$  **Productos\_Tipo\_T**.

#### – No es una primitiva del Álgebra:

$$R(A,B) \div S(B) = \pi_A(R) - \pi_A((\pi_A(R) \times S) - R)$$

- ¿Qué hacer cuando los atributos son difusos?
  - Distribuciones de posibilidad, o existe un grado de semejanza entre los atributos. Por ejemplo, suponer que existen productos que no sean de Tipo **T**, pero que son similares a algunos de ellos.
- ¿Y si nos interesa cambiar el cuantificador “TODOS” por uno que no sea tan estricto (más flexible), como “casi\_todos”, por ejemplo?

## Problemas de la División Difusa

- **Problemas** en Bases de Datos Difusas:  $R(A,B) \div S(B) = ?_A(R) - ?_A((?_A(R) \times S) - R)$ 
  - **Proyección Relacional:**
    - Se aplica 3 veces sobre los atributos **A**.
    - Si los atributos **A** incluyen uno o más atributos difusos habría que eliminar redundancia utilizando alguna técnica de las expuestas.
  - **Diferencia Relacional:**
    - GEFRED no define como calcular la relación resultante.
    - Hay que eliminar las tuplas de la primera relación que también están en la segunda:
      - ¿Eliminamos las tuplas si se parecen en unos atributos “mucho” y en otros “poco”?
      - ¿Y si una tupla de la segunda relación se parece a “varias” de la primera?
  - **El Cuantificador Universal ( " ) puede ser demasiado restrictivo.**
    - Es útil poder utilizar cuantificadores difusos similares a " (casi todos, la mayoría, muchos...), pero también otros muy diferentes que cambien el sentido de la división (una minoría, pocos...).
- **Solución:** División Relacional Difusa Generalizada que exponemos a continuación, basada en el modelo **GEFRED** (Medina et al., 1994; Medina, 1994). 3

## Enfoque de la División Difusa

- **Calcular la Verdad de Afirmaciones con Cuantificadores:**
  - **Ejemplos del tipo de afirmaciones:**
    - “La mayoría estudiantes son buenos en Matemáticas”
    - “Pocos enfermos están hospitalizados más de 15 días”.
  - **Estas afirmaciones no responden al formato de una División.**
  - **Han sido estudiadas en diversas publicaciones:** (Zadeh, 1983; Yager, 1991, 1992, 1993; Vila et al., 1997).
- **División Relacional Difusa Generalizada:** (Galindo et al., 1997, 2001a, 2001b)
  - **Requiere la definición de dos nuevos operadores en el Álgebra Relacional** (útiles por sí mismos para cierto tipo de consultas):
    - **Intersección Difusa Cualificada:**  $R \zeta_{\theta} R'$ 
      - **Operación binaria** que mide la **posibilidad** de que las tuplas de **R** existan en la relación **R'**, o también, la **posibilidad** de que las tuplas de **R** estén en la **intersección**.
    - **Proyección Difusa con Funciones de Grupo**  $\hat{A} : P^{\hat{A}}(R; X; X')$ 
      - Permite utilizar, en Álgebra Relacional, una **lista  $\hat{A}$  de funciones de grupo (o de agregación)** aplicadas a los atributos **X** de la relación **R**, **agrupando** las tuplas de **R** por el valor de los atributos **X'**.

## Intersección Difusa Cualificada: $R \zeta_Q R'$

- Sean las Relaciones Difusas siguientes: Con  $i = 1, \dots, m$  y  $k = 1, \dots, m'$ 

$$R = \begin{cases} H = \{(A_1: D_1[C_1]), \dots, (A_n: D_n[C_n])\} \\ B = \{(A_1: \tilde{d}_{11}[c_{11}]), \dots, (A_n: \tilde{d}_{in}[c_{in}])\} \end{cases} \quad R' = \begin{cases} H = \{(A'_1: D'_1[C'_1]), \dots, (A'_{n'}: D'_{n'}[C'_{n'}])\} \\ B = \{(A'_1: \tilde{d}'_{1k}[c'_{k1}]), \dots, (A'_{n'}: \tilde{d}'_{kn}[c'_{kn}])\} \end{cases}$$
- Resultado de  $R \zeta_Q R'$  :**
  - Es la misma relación  $R$  pero añadiendo un **grado de compatibilidad  $c_i$**  para cada tupla, que mida la **posibilidad de que la tupla  $i$  de  $R$  exista en  $R'$** .
  - Atributo de compatibilidad  $C_A$  para cada tupla  $i$  :**

$$c_i = \max_{w=1, \dots, m'} \{ \min_{q=1, \dots, n} \{ \Theta^= (\tilde{d}_{iq}, \tilde{d}'_{wq}) \} \}$$
    - Esa ecuación se hace más eficiente si algunos atributos son *crisp*.
    - $\Theta^=$  es un comparador difuso de igualdad (por ejemplo la medida de Posibilidad), pero podría usarse otro (Necesidad) y otros que no sean de igualdad para distintos significados: (Galindo et al., 1998, 2000).
- La Intersección Difusa Cualificada  $R \zeta_Q R'$  mide la posibilidad de que las tuplas de  $R$  estén en  $R'$  (o en la intersección).**
- No cumple la propiedad conmutativa.**

5

## Proyección con Funciones de Grupo Á

- Proyección Difusa de  $R$  sobre  $X'$  con Funciones de Grupo Á sobre  $X$  :**  $P^{\hat{A}}(R; X; X')$ 
  - Modela en Álgebra Relacional lo que en SQL se efectúa con la cláusula **GROUP BY** de una sentencia **SELECT**:
    - SELECT:** Aplicado a los atributos de  $X'$  y a las funciones de grupo Á sobre los atributos de  $X$ .
    - FROM:** Relación  $R$ .
    - GROUP BY:** Atributos de  $X'$ .
  - Problema:** Si  $X'$  incorpora atributos difusos es necesario establecer un criterio para saber cuando considerar que dos tuplas son "indistinguibles".
  - Ejemplos:**
    - $P^{\{\min, \text{sum}\}}(R; \{A\}; \{B, C\})$ , equivale a
$$\begin{aligned} &\text{SELECT } A, \min(B), \text{sum}(C) \\ &\text{FROM } R \\ &\text{GROUP BY } A; \end{aligned}$$
    - "Alumnos que son Buenos (en grado mínimo 0.8) en dos o más asignaturas":
      - $R' = s_C(R)$ , con  $C = Q^=(\text{Nota}, \text{Bueno})^{\geq 0.8}$
      - $R'' = P^{\{\text{count}\}}(R'; \{\text{Alumno}\}; \{\text{Nota}\})$ .
      - Resultado:**  $s_C(R'')$ , con  $C = \text{count}(\text{Nota})^{\geq 2}$ ;

6

## División Relacional Difusa: $R \div R'$

Si no son *crisp* se necesita un criterio para decidir cuando 2 tuplas son indistinguibles

- Sean  $R$  y  $R'$  dos Relaciones Difusas:

$R(A_1, \dots, A_n, A_{n'+1}, \dots, A_n)$ , con  $A = \{A_1, \dots, A_n\}$  *crisp*.  
 $R'(A_{n'+1}, \dots, A_n)$

Atributos de  $R$   
y no de  $R'$

- Pasos para la División Difusa Generalizada:**

- 1.  $R'' = P_A(R) \times R'$  (Proyección y Producto Cartesiano)
- 2.  $R''' = R'' \zeta_Q R$  (Intersección Difusa Cualificada)
- 3. **División Difusa Generalizada:**  $R \div R' = P^{\hat{A}}(R'''; A; C)$   
 donde:  $C$  = Atributo de compatibilidad calculado en el paso 2.  
 $\hat{A} = \{\min\}$  (Función mínimo de Grupo).

- Ejemplo:** Supongamos una BDRD con una relación  $R$  con las características de jugadores de baloncesto de diversos equipos.
  - Consulta:** "Equipos que tienen todos los tipos de jugadores que el equipo de Córdoba".
  - Calculamos:**  $R' = P_{\text{ALTURA, CALIDAD}}(S_{\text{EQUIPO=Córdoba}}(R))$ ;
  - Solución:**  $R \div R'$

7

## División Difusa Generalizada: Ejemplo

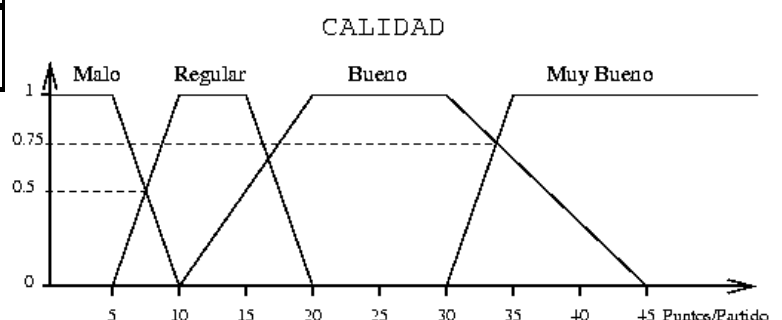
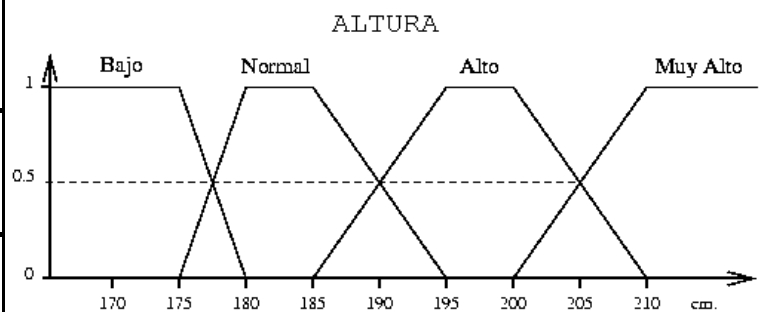
$R$ :

EQUIPO	ALTURA	CALIDAD
Córdoba	Bajo	Muy Bueno
Córdoba	Muy Alto	Malo
Granada	Bajo	Muy Bueno
Granada	Muy Alto	Malo
Granada	Alto	Regular
Málaga	Bajo	Muy Bueno
Málaga	Alto	Malo
Málaga	Muy Alto	Muy Bueno
Sevilla	Bajo	Bueno
Sevilla	Muy Alto	Malo
Sevilla	Normal	Bueno
Cádiz	Muy Alto	Muy Bueno
Cádiz	Bajo	Bueno

$R'$ :

ALTURA	CALIDAD
Bajo	Muy Bueno
Muy Alto	Malo

$\} \Rightarrow \{$



## División Difusa Generalizada: Ejemplo

- 1.  $R'' = P_{\text{EQUIPO}}(R) \cdot R'$  (Proyección y Producto Cartesiano)
- 2.  $R''' = R'' \zeta_Q R$  (Intersección Difusa Cualificada)

$C_{\text{EQUIPO}}$	EQUIPO	ALTURA	CALIDAD
1	Córdoba	Bajo	Muy Bueno
1	Córdoba	Muy Alto	Malo
1	Granada	Bajo	Muy Bueno
1	Granada	Muy Alto	Malo
1	Málaga	Bajo	Muy Bueno
0.5	Málaga	Muy Alto	Malo
0.75	Sevilla	Bajo	Muy Bueno
1	Sevilla	Muy Alto	Malo
0.75	Cádiz	Bajo	Muy Bueno
0	Cádiz	Muy Alto	Malo

9

## División Difusa Generalizada: Ejemplo

- 3. Por último, calculamos la solución definitiva:  
Proyección Difusa de  $R'''$  sobre EQUIPO con Función de Grupo mínimo sobre  $C_{\text{EQUIPO}}$ :

$$R \div R' = P^{\{\min\}}(R'''; \text{EQUIPO}; C_{\text{EQUIPO}})$$

EQUIPO	ALTURA	CALIDAD	$C_{\text{EQUIPO}}$
Córdoba	Bajo	Muy Bueno	1
Córdoba	Muy Alto	Malo	1
Granada	Bajo	Muy Bueno	1
Granada	Muy Alto	Malo	1
Málaga	Bajo	Muy Bueno	1
Málaga	Muy Alto	Malo	0.5
Sevilla	Bajo	Muy Bueno	0.75
Sevilla	Muy Alto	Malo	1
Cádiz	Bajo	Muy Bueno	0.75
Cádiz	Muy Alto	Malo	0

EQUIPO	$C_{\text{EQUIPO}}$
Córdoba	1
Granada	1
Málaga	0.5
Sevilla	0.75
Cádiz	0

10

## Relajación del " " en la División Difusa

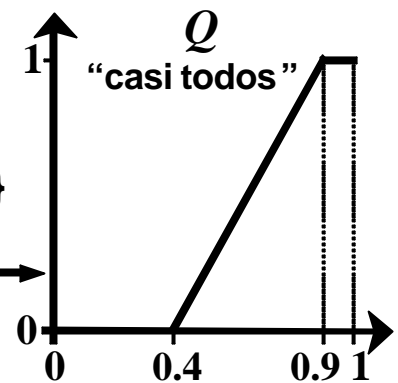
- Cuantificadores CLÁSICOS:**

- Cuantificador Universal " →  $\hat{A} = \{\min\}$
- Cuantificador Existencial \$ →  $\hat{A} = \{\max\}$

- Cuantificadores DIFUSOS:**

- Cuantificador Absoluto  $Q_a$  →  $\hat{A} = \{Q_a (\text{sum})\}$
- Cuantificador Relativo  $Q_r$  →  $\hat{A} = \{Q_r (\text{avg})\}$

- **Ejemplo:** Con el cuantificador, relativo  $Q$  "casi todos", en el paso 3 se obtiene que:



EQUIPO	ALTURA	CALIDAD	$C_{\text{EQUIPO}}$
Córdoba	Bajo	Muy Bueno	1
Córdoba	Muy Alto	Malo	1
Granada	Bajo	Muy Bueno	1
Granada	Muy Alto	Malo	1
Málaga	Bajo	Muy Bueno	1
Málaga	Muy Alto	Malo	0.5
Sevilla	Bajo	Muy Bueno	0.75
Sevilla	Muy Alto	Malo	1
Cádiz	Bajo	Muy Bueno	0.75
Cádiz	Muy Alto	Malo	0

EQUIPO	$C_{\text{EQUIPO}}$
Córdoba	1
Granada	1
Málaga	0.7
Sevilla	0.95
Cádiz	0

11

## División Difusa Generalizada: Ventajas

- La División Relacional Difusa ha sido una operación muy estudiada desde diversos puntos vista por multitud de científicos, dando lugar a distintas técnicas:
  - Unas técnicas son generales y otras específicas para un determinado tipo de BDRD o para un determinado significado de los grados difusos.
- Se ha demostrado que la técnica de la División Difusa Generalizada antes definida es la que aporta mayores ventajas que otras publicadas: (Galindo et al., 2001a, 2001b)
  - **Obtiene resultados intuitivos usando o no cuantificadores difusos:** Son los resultados que intuitivamente se esperan.
    - Los resultados son más intuitivos que usando las demás técnicas.
  - Las relaciones difusas permiten almacenar **multitud de tipos de datos diferentes:** Distribuciones de posibilidad, relaciones de similitud...
    - **SÓLO se necesita una "función de comparación" entre cada dos valores del mismo tipo.**
    - Otras técnicas restringen el tipo de datos difusos que pueden tratar.
  - Las relaciones de esta División pueden tener **cualquier número de atributos comunes.**
    - La mayoría de las demás técnicas de división sólo admiten un atributo en común entre ambas relaciones.
  - Permite utilizar **cualquier cuantificador difuso** definido de cualquier forma aunque, lógicamente, los resultados dependen de esta definición.
    - Otras técnicas restringen la forma de definir el cuantificador difuso.

12

## ***Otras Técnicas de División Difusa***

- **Otras Técnicas de División Relacional Difusa:**

- **División de Mouaddib (1994).**

- Sólo permite un atributo en común entre ambas relaciones.
- Permite utilizar distribuciones de posibilidad y escalares (etiquetas) con una relación de similitud definida en su dominio.
- Es interesante destacar que usa también medidas de necesidad y define la división utilizando grados de importancia.
- No permite cuantificadores difusos, una característica que es muy importante en las operaciones de división difusa.

- **División de Umano-Fukami (1994).**

- Permite un grado de pertenencia para cada tupla.
- No permite cuantificadores difusos.

- **División de Bosc-Dubois-Pivert-Prade (1997).**

- Su modelo de BDRD sólo admite añadir un grado a cada tupla, no permitiendo otro tipo de valores difusos en sus atributos.
- Plantean distintos tipos de divisiones para distintos significados de esos grados (grado de cumplimiento y grado de importancia).
- En determinados casos los datos son poco intuitivos.
- No admite varios atributos en común ni cuantificadores difusos.

13

## ***Otras Técnicas de División Difusa***

- **División de Yager (1991).**

- Su modelo de BDRD sólo admite añadir un grado de pertenencia a cada tupla, no permitiendo otro tipo de valores difusos en sus atributos.
- No admite varios atributos en común.
- En determinados casos los datos obtenidos son poco intuitivos.
- Permite cuantificadores difusos a través de los llamados operadores OWA, pero sólo admite que estos sean monótonos, aunque sólo estudia el caso de los monótonos crecientes.

- **División de Vila-Cubero-Medina-Pons (1995).**

- No define qué hacer si existen varios atributos en común.
- En determinados casos los datos obtenidos son poco intuitivos.
- Sólo estudian utilizar cuantificadores difusos crecientes definidos de forma lineal.
- Más que una división relacional en sentido estricto es, como ellos mismo lo llaman, una “selección generalizada”, que tiene cierta similitud semántica con la división relacional.

14

## Otras Técnicas de División Difusa

### – División de Dubois-Nakata-Prade (2000).

- Es similar al método de Bosc-Dubois-Pivert-Prade (1997) pero permitiendo el uso de cuantificadores difusos (absolutos y relativos).
- Su modelo de BDRD sólo admite añadir un grado a cada tupla, no permitiendo otro tipo de valores difusos en sus atributos, aunque estudian el caso en el que esos grados (de cumplimiento) no sean valores precisos, sino conjuntos difusos en el intervalo  $[0,1]$ .
- Plantean distintos tipos de divisiones para distintos significados de esos grados (grado de cumplimiento y grado de importancia).
  - Incluso permiten la coexistencia de ambos tipos de grados en la relación del divisor.
- Sólo permite un atributo en común entre ambas relaciones.

### – División de Nakata (2000).

- Es una evolución de diversas propuestas:
  - Permite atributos con relaciones de similitud (Mouaddib, 1994).
  - Permite distribuciones de posibilidad (Bosc-Liétard, 1995), usando medidas de posibilidad y necesidad para compararlos.
  - Cada tupla tiene un grado de pertenencia difuso (Dubois-Prade, 1996) y para procesarlos usa las implicaciones de Dienes y Gödel.
- No permite cuantificadores difusos.
- Sólo permite un atributo en común entre ambas relaciones.

15

## División Difusa de Yager (1991)

### • Operador OWA de Dimensión n: (OWA=Ordered Weighted Average)

- Es una función  $F: [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ 
  - Tiene asociado un conjunto de  $n$  pesos  $w_i$ , tal que:  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ ;
  - Para cada argumento posible  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , se tiene que:

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n b_i \cdot w_i$$

donde los  $b_i$  son los  $a_i$  ordenados de mayor a menor:  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$

- Es un **método intermedio entre tomar el valor mínimo**, con el vector de pesos  $(0, \dots, 0, 1)$ , **y el máximo** con el vector de pesos  $(1, 0, \dots, 0)$ .

### • División de Yager:

- En síntesis, su idea es para cada valor  $u$  de los atributos no comunes que aparecen en  $R$ , se aíslan los valores de los atributos comunes en una relación  $R_u^+$ .
- Luego, para cada elemento  $u$  se evalúa el grado de verdad de la expresión “ $Q$  S's están en  $R_u^+$ ”, para lo cual usa un operador OWA.
- Veamos este proceso con un ejemplo:

16



## División Difusa de Yager: Ejemplo

### • Relaciones:

- **R**: Relación de personas, habilidades que poseen y en qué medida las poseen.
- **S**: Relación que indica el grado con el que cada habilidad requiere destreza manual.

Habilidad	$a$
I	1.0
II	0.8
III	0.2
IV	0.0

Nombre	Habilidad	$a$
Jean	I	1.0
Jean	II	0.7
Jean	III	0.5
Barbara	I	0.3
Barbara	II	0.6
Debbie	I	1.0
Debbie	II	0.7
Debbie	III	0.5
Debbie	IV	0.2
Tina	II	1.0
Patricia	I	1.0
Patricia	II	0.8
Patricia	III	0.2

### • División $R, S$ : “Mostrar la gente que tiene la mayoría de las habilidades que requieren destreza manual”.

- 1. Proyectamos sobre los atributos no comunes (Nombre):  
{Jean, Barbara, Debbie, Tina, Patricia}.
- 2. Para cada valor  $u$  de los anteriores se calcula  $R_u^+$ .
  - Para Bárbara es:  $\{(I, 0.3), (II, 0.6)\}$
- 3. Evaluar el grado de verdad de la afirmación “ $Q$  de los elementos de  $S$  están en  $R_u^+$ ”, para cada  $u$ .

17

## División Difusa de Yager: Ejemplo

- 3. Evaluar la verdad de “ $Q$  de los elementos de  $S$  están en  $R_u^+$ ”:  
Consideraremos que  $Q$  es “la mayoría” definido como:  $Q(r) = r$

- (a) Se ordenan los grados de  $S$ :  $e_1=0, e_2=0.2, e_3=0.8, e_4=1$ .  
Se calcula la suma:  $d=2$
- (b) Se calculan los valores  $S_j$ , siendo  $S_0=0$ :  $S_j = \frac{e_j}{d} + S_{j-1}$   
 $S_0=0, S_1=0, S_2=0.1, S_3=0.5, S_4=1$ .
- (c) Se calculan los pesos:  $w_j = Q(S_j) - Q(S_{j-1})$ .  
 $w_1=0, w_2=0.1, w_3=0.4, w_4=0.5$ .

- (d) Para cada  $u$ :

- Calcular  $G_i$ , con  $i \in \{I, II, III, IV\}$ :  $G_i = \max\{1 - a_i, R_u^+(i)\}$
- Ordenar de mayor a menor los  $G_i$ :  $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq b_4$
- El grado de verdad buscado es:  $T(u) = \sum_{i=1}^4 b_i \cdot w_i$
- Ej: Para  $u = \text{“Barbara”}$ :
  - $G_I = \max\{1 - 1.0, 0.3\} = 0.3$ ;
  - $G_{II} = \max\{1 - 0.8, 0.6\} = 0.6$ ;
  - $G_{III} = \max\{1 - 0.2, 0.0\} = 0.8$ ;
  - $G_{IV} = \max\{1 - 0.0, 0.0\} = 1$ ;

$$T(\text{Barbara}) = 1 \cdot 0 + 0.8 \cdot 0.1 + 0.6 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.5 = \mathbf{0.47};$$

18

## División Difusa de Yager: Ejemplo

### • Resultado:

- Utilizamos también el cuantificador universal ( $\forall$ ), definido como:  $Q(r) = 1$ , si y sólo si  $r = 1$ , tomando el cero para el resto de valores.
- Para ese tipo de datos, también puede usarse la División Difusa Generalizada, con sólo definir un comparador difuso.
  - Por ejemplo, podemos utilizar como comparador la implicación de Gödel,  $x \otimes y$ , donde  $x$  e  $y$  son los valores en  $S$  y  $R$  respectivamente:  $I(x, y) = \{1 \text{ si } x \leq y, y \text{ en otro caso}\}$

Nombre	a		C	
	la mayoría	a"	la mayoría	C"
Jean	0.77	0.70	0.93	0.70
Barbara	0.47	0.30	0.48	0.00
Debbie	0.77	0.70	0.93	0.70
Tina	0.42	0.00	0.50	0.00
Patricia	0.82	0.80	1.00	1.00

- Problema en los resultados:
  - Patricia cumple perfectamente con los requisitos expresados en la relación  $S$  y, sin embargo obtiene grados de cumplimiento demasiado pequeños.

19

## División Difusa de Dubois et al. (2000)

- Utilizan **grados difusos** y dependiendo de su **significado** utilizan distintos tipos de **Implicaciones Difusas**:
  - Grado de cumplimiento: Usan R-Implicaciones (Gödel, Goguen, Rescher-Gaines, Luckasiewicz...)
  - Grado de Importancia: Usan S-Implicaciones (Dienes, Reichenbach, Lukasiewicz...)
- El Grado de Cumplimiento en la División  $R(A, B) \text{ , } S(B)$  se calcula como:  $a_{R, S}(a) = \min_b \{ a_S(b) \otimes a_R(a, b) \}$ ;
- División con Cuantificadores Difusos:
  - Absolutos: Deben ser crecientes y con  $Q(m)=1$ , donde  $m$  es el número de tuplas (o requisitos) en la relación  $S$ :

$$a_{R \div_q S} = \min_{i \in [1, m]} \max_a \{ a_S(a) \rightarrow_{S(i)} a_R(a, b), Q(i-1) \}$$

donde  $a_S(a) \rightarrow_{S(i)} a_R(a, b)$  son todas las  $m$  implicaciones posibles ordenadas de mayor a menor.

- Relativos:  $a_{R \div_q S} = \min_{i \in [1, m]} \max_a \{ a_S(a) \rightarrow_{S(i)} a_R(a, b), Q\left(\frac{i-1}{m}\right) \}$

20

## División de Dubois et al.: Ejemplo

- Utilizamos las mismas tablas que en el ejemplo anterior:
  - Cuantificador “la mayoría”** definido como:  $Q(r) = r$
  - Jean y Debbie:** Lógicamente no se distinguen sus valores:

Habilidad	a
I	1.0
II	0.8
III	0.2
IV	0.0

Nombre	Habilidad	a
Jean	I	1.0
Jean	II	0.7
Jean	III	0.5
Barbara	I	0.3
Barbara	II	0.6
Debbie	I	1.0
Debbie	II	0.7
Debbie	III	0.5
Debbie	IV	0.2
Tina	II	1.0
Patricia	I	1.0
Patricia	II	0.8
Patricia	III	0.2

- Usando la **Implicación de Gödel**:

$\{1/I, 0.7/II, 1/III, 1/IV\}$

- Ordenamos de mayor a menor** esos valores y obtenemos para Jean y Debbie:

–  $\min \{ \max(1, Q(0/4)), \max(1, Q(1/4)), \max(1, Q(2/4)), \max(0.7, Q(3/4)) \} = 0.75$

– ¡Y cumplen “la mayoría” de los requisitos de  $S$ !

- Bárbara:**  $\{0.3/I, 0.6/II, 0/III, 1/IV\}$

•  $\min \{1, 0.6, 0.5, 0.75\} = 0.5$

- Tina:**  $\{1/I, 0/II, 0/III, 1/IV\}$

•  $\min \{1, 1, 0.5, 0.75\} = 0.5$

- Patricia:**  $\{1/I, 1/II, 1/III, 1/IV\}$

•  $\min \{1, 1, 1, 1\} = 1$

- También se exponen los resultados con el **cuantificador universal** (“”).

División D.G.

Nombre	a <sup>la mayoría</sup>	a <sup>”</sup>	C <sup>la mayoría</sup>	C <sup>”</sup>
Jean	0.75	0.70	0.93	0.70
Barbara	0.50	0.00	0.48	0.00
Debbie	0.75	0.70	0.93	0.70
Tina	0.50	0.00	0.50	0.00
Patricia	1.00	1.00	1.00	1.00

21

## División Difusa de Vila et al. (1995)

- Admite **distribuciones de posibilidad** como valores, pero lo que hace es “**comprimir**” las relaciones  $R$  y  $S$ :
  - $R(A,B)$ : Comprime los valores de las distribuciones de posibilidad del atributo  $B$  para todos las tuplas con igual valor de  $A$ .
  - $S(B)$ : Comprime todos los valores del atributo  $B$  en una única distribución de posibilidad  $P$ .
  - Método de compresión: **UNIÓN** de conjuntos difusos (función máximo).
- Considera **cuantificadores difusos sólo crecientes** y con un formato muy específico, representado por dos valores  $(a,b)$ , de los que se obtiene el valor  $\alpha_Q = (b - a)/2 + 1 - b$ ;
 
$$Q(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ (x - a)/(b - a) & \text{si } a < x < b \\ 1 & \text{si } b \leq x \leq 1 \end{cases}$$
- Con los datos anteriores definen lo que llaman “selección generalizada” o “ $\approx$ -selección”, añadiendo un grado a cada valor del atributo  $A$  de  $R$ , de la siguiente forma:  $\alpha_Q \cdot P(B/P) + (1 - \alpha_Q) \cdot N(B/P)$ 
  - $P(B/P)$  y  $N(B/P)$  son, respectivamente, las medidas de posibilidad y necesidad con las que cada  $B$  se empareja con  $P$ .

22

## **Bibliografía**

- P. Bosc, L. Liétard, "On the Division of Relations with imprecise Information". In "Foundations and Applications of Possibility Theory". Eds. T. Gooman, Da Ruan, E.E. Kerre, pp. 287-294. Proc. of FART'95, Gent, Belgium, Singapore. World Scientific, 1995.
- P. Bosc, D. Dubois, O. Pivert, H. Prade, "Flexible queries in relational databases -- The example of the division operator". Theoretical Computer Science 171, pp. 281-302, 1997.
- D. Dubois, H. Prade, "Semantics of Quotient Operators in Fuzzy Relational Databases". Fuzzy Sets and Systems, 78, pp. 89-93, 1996.
- D. Dubois, M. Nakata, H. Prade, "Extended Divisions for Flexible Queries in Relational Databases". In "Knowledge Management in Fuzzy Databases". Eds. O. Pons, M.A. Vila, J. Kacprzyk, pp. 105-121, Physica Verlag, Heidelberg, 2000.
- J. Galindo, J.M. Medina, M.C. Aranda, "Una solución al problema de la División Relacional Difusa". VII Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (ESTYLF'97), pp. 51-56. Tarragona (Spain), September 1997.
- J. Galindo, J.M. Medina, A. Vila, O. Pons, "Fuzzy Comparators for Flexible Queries to Databases". Iberoamerican Conference on Artificial Intelligence, IBERAMIA'98, Lisbon (Portugal), pp. 29-41, October 1998.
- J. Galindo, "Tratamiento de la Imprecisión en Bases de Datos Relacionales: Extensión del Modelo y Adaptación de los SGBD Actuales". Ph. Doctoral Thesis, University of Granada (Spain), March 1999 ([www.lcc.uma.es](http://www.lcc.uma.es)).

23

## **Bibliografía**

- J. Galindo, J.M. Medina, J.M. Rodríguez, "Comparadores para Bases de Datos Difusas: Definiciones, Clases y Relaciones". X Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (ESTYLF'2000), pp. 187-192. Sevilla (Spain), September 2000 ([www.lcc.uma.es](http://www.lcc.uma.es)).
- J. Galindo, J.M. Medina, M.C. Aranda, "Fuzzy Division in Fuzzy Relational Databases: an Approach". Fuzzy Sets and Systems, 121(3), pp. 471-490, 2001a.
- J. Galindo, J.M. Medina, J.C. Cubero, M.T. García, "Relaxing the Universal Quantifier of the Division in Fuzzy Relational Databases". International Journal of Intelligent Systems, 16(6), pp. 713-742, 2001b.
- J.M. Medina, O. Pons, M.A. Vila, "GEFRED. A Generalized Model of Fuzzy Relational Databases". Information Sciences, 76(1-2), 87-109, 1994.
- J.M. Medina, "Bases de Datos Relacionales Difusas. Modelo Teórico y Aspectos de su Implementación". PhD. Thesis, Univ. of Granada (Spain), 1994 ([www.decsai.ugr.es](http://www.decsai.ugr.es)).
- N. Mouaddib, "Fuzzy Identification in Fuzzy Databases: The Nuanced Relational Division". International Journal of Intelligent Systems, 9, pp. 461-473, 1994.
- M. Nakata, "Formulation of Division Operators in Fuzzy Relational Databases". In "Knowledge Management in Fuzzy Databases". Eds. O. Pons, M.A. Vila, J. Kacprzyk, pp. 144-156, Physica Verlag, Heidelberg, 2000.
- H. Prade, C. Testemale, "Generalizing Database Relational Algebra for the Treatment of Incomplete/Uncertain Information and Vague Queries". Informat. Sciences 34, pp. 115-143, 1984.

24

## ***Bibliografía***

- M. Umamo, S. Fukami, “Fuzzy Relational Algebra for Possibility-Distribution-Fuzzy-Relational Model of Fuzzy Data”. J. of Intelligent Information Systems, 3, pp. 7-28, 1994.
- M.A. Vila, J.C. Cubero, J.M. Medina, O. Pons, “The Generalized Selection: An Alternative Way for the Quotient Operations in Fuzzy Relational Databases”. In “Fuzzy Logic and Soft Computing”. Eds. B. Bouchon-Meunier, R.R. Yager, L.A. Zadeh, pp. 241-250. World Scientific, Singapore, 1995.
- M.A. Vila, J.C. Cubero, J.M. Medina, O. Pons, “Using OWA Operator in Flexible Query Processing”, Vol. “The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory, Methodology and Applications”. Eds. Ronald R. Yager and Janusz Kacprzyk. Kluwer, USA, pp. 258-274, 1997.
- R.R. Yager, “On Ordered Weighted averaging Aggregation Operators in Multicriteria Decisionmaking”. IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, 18, pp. 183-190, 1988.
- R.R. Yager, “Fuzzy Quotient Operators for Fuzzy Relational Databases”. First Int. Fuzzy Engineering Symposium, IFES'91, pp. 289-296, 1991.
- R.R. Yager, “Fuzzy Quotient Operators”. IV Int. Conference on Information Processing and Management in Knowledge-Based Systems, IPMU'1992, pp. 317-322, 1992.
- R.R. Yager, “Families of OWA operators”. Fuzzy Sets and Systems 59, pp.125-148, 1993.
- L.A. Zadeh, “A Computational Approach to Fuzzy Quantifiers in Natural Languages”. Computer Mathematics with Applications, 9, pp. 149-183, 1983.