

# Conjuntos y Sistemas Difusos

## (Lógica Difusa y Aplicaciones)

### 3. Caracterización de Conjuntos Difusos: Entropía, Energía, Especificidad, Marcos de Conocimiento, Codificación/Decodificación y Relaciones Difusas



E.T.S.I. Informática

J. Galindo Gómez

#### Medidas de Difuminación: ENTROPÍA

- **ENTROPÍA** (*Entropy*)  $H$ : Concepto introducido por Shannon y Weaver (1949).

$$H(p_1, \dots, p_n) = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i$$

donde  $p_i \in [0,1]$  son las probabilidades de que ocurran los sucesos de  $X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , por lo que  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ .

- **Mide la incertidumbre** que hay en un experimento de naturaleza probabilística.
- **Situaciones Límite:**

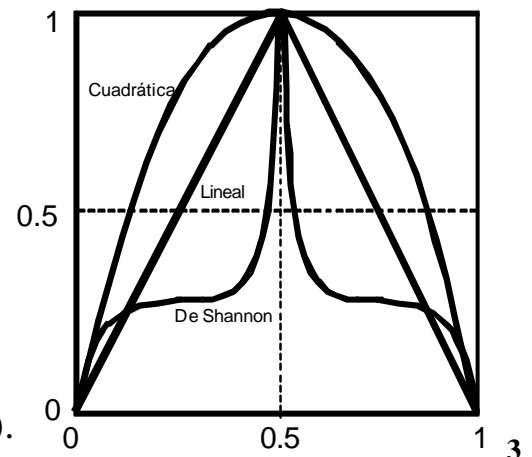
- 1. Si todos los eventos son igual de probables ( $p=1/n$ ), la Entropía alcanza su máximo valor:  $H(p_1, p_2, \dots, p_n) \leq H(1/n, \dots, 1/n)$ .
  - Ejemplo:  $n=2 \Rightarrow (p_1=p \text{ y } p_2=1-p): H(p_1, p_2) = -p \log p - (1-p) \log (1-p)$ 
    - » Si  $p=1/2$ , entonces la Entropía alcanza su máximo valor, ya que los 2 eventos son equiprobables:  $H(p_1, p_2) = -1/2 (-1) - 1/2 (-1) = 1$
- 2. Si un evento es el único posible (su probabilidad es 1), entonces la Entropía alcanza su menor valor, 0:  $H(0, \dots, 1, \dots, 0) = 0$ .

- **Entropía Ponderada:** Se añade un peso  $w_i > 0$  a cada sumando:

$$H(p_1, \dots, p_n) = - \sum_{i=1}^n w_i p_i \log p_i$$

## Medidas de Difuminación: ENTROPÍA

- Definamos una función  $h$  (Ebanks, 1983):  $h: [0,1] \rightarrow [0,1]$ , que se aplicará a los valores de un conj. difuso y que cumple 6 propiedades:
  - 1. Puntiaaguda:**  $h(A(x_i)) = 0 \hat{=} A(x_i) \hat{=} 1$   
(valores extremos: completa exclusión o completa pertenencia).
  - 2. Valor Máximo** de  $h(A(x_i)) \hat{=} A(x_i)=1/2$ , de forma que  $h(1/2) = 1$ .
  - 3. Monótona:** Creciente en el intervalo  $[0,1/2]$  y decreciente en  $[1/2,1]$ .
  - 4. Valoración:**  $h(\max\{A(x_i), A(x_j)\}) + h(\min\{A(x_i), A(x_j)\}) = h(A(x_i)) + h(A(x_j))$ .
  - 5. Resolución:**  $h(A(x_i)) \geq h(A^*(x_i))$ , siendo  $A^*$  una versión afilada de  $A$ :
    - $A(x_i) \geq 1/2 \Rightarrow A^*(x_i) \geq A(x_i)$
    - $A(x_i) < 1/2 \Rightarrow A^*(x_i) < A(x_i)$
  - 6. Simetría:**  $h(A(x_i)) = h(A(1 - x_i))$ .
- Ejemplos:
  - 1. Función Lineal:** 
$$h(u) = \begin{cases} 2u, & \text{si } u \in [0, 1/2] \\ 2(1-u), & \text{si } u \in [1/2, 1] \end{cases}$$
  - 2. Función Cuadrática:**  $h(u) = 4u(1-u)$ .
  - 3. Función de Shannon:** 
$$h(u) = -u \log u - (1-u) \log(1-u).$$

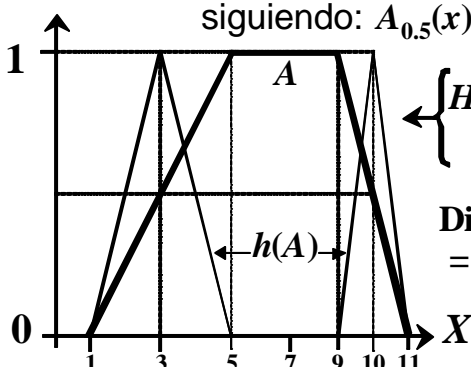


## Medidas de Difuminación: ENTROPÍA

- ENTROPÍA  $H$  de un Conjunto Difuso  $A$ :**  $H(A) = \sum_{i=1}^n h(A(x_i))$ 
  - $H$  cumple las 6 propiedades anteriores.
    - En un universo  $\infty$  la  $\Sigma$  es una integral.
  - Si  $h$  es la función lineal:
    - Si  $A$  es un conjunto difuso triangular, tenemos que:  $H(A) = \text{Área}(A)$ .
    - La entropía es el doble de la distancia de Hamming entre  $A$  y su 0.5-corte,  $A_{0.5}$ .

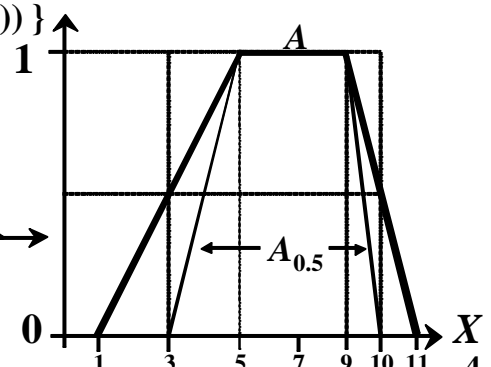
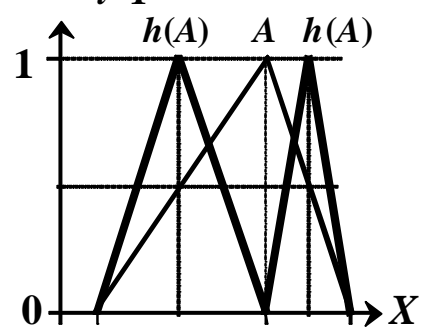
$$H(A) = 2 \sum_{i=1}^n |A(x_i) - A_{0.5}(x_i)|$$

- El 0.5-corte,  $A_{0.5}$ , se entiende como el conjunto difuso en el que sólo tienen valores mayores a cero los puntos  $x$  tal que  $A(x) > 0.5$ , siguiendo:  $A_{0.5}(x) = \max\{0, A(x) - (1-A(x))\}$



$$\left\{ \begin{aligned} H(A) &= 4/2 + 2/2 = \\ &= 2 + 1 = \underline{3} \end{aligned} \right.$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Dist\_Hamming}(A, A_{0.5}) &= \\ &= (2-1) + 0 + (1-0.5) = \underline{1.5} \end{aligned} \right\}$$



## Medidas de Difuminación: ENERGÍA

- **ENERGÍA  $E$  de un Conjunto Difuso  $A$ :** (De Luca, S. Termini, 1974).

$$E(A) = \sum_{i=1}^n e(A(x_i))$$

donde  $e: [0,1] \rightarrow [0,1]$ , es una función creciente con  $e(0)=0$  y  $e(1)=1$ .

- La Energía mide la “masa” total del conjunto.
- Si  $e$  es la identidad,  $e(u)=u$ , la **ENERGÍA** es la **Cardinalidad** (área) del conjunto difuso  $A$ :

$$E(A) = \text{Card}(A) = \sum_{i=1}^n A(x_i)$$

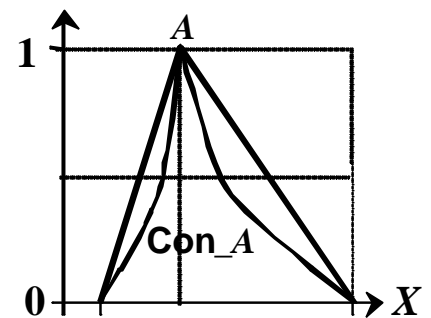
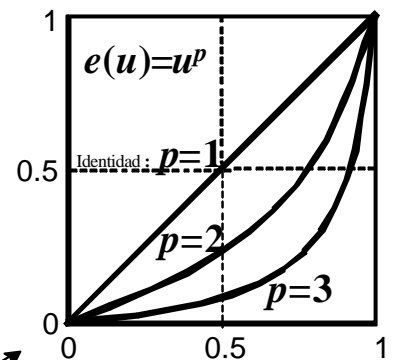
- Otras definiciones para  $e$  pueden ser:

$e(u)=u^p$  (con  $p>0$ ), y  $e(u)=\sin(u \cdot p/2)$ .

- Si  $e(u)=u^2$  ( $p=2$ ), la **Energía** es:

- **Cardinalidad** del conj. difuso
- “**concentración**” de  $A$  ( $\text{Con}_A$ ).
- El cuadrado de la **distancia Euclídea** entre  $A$  y el conjunto vacío ( $\emptyset$ ):

$$E(A) = d^2(A, \emptyset) = \text{Card}(\text{Con}_A) = \sum_{i=1}^n A^2(x_i)$$



5

## Difuminación y ESPECIFICIDAD

- **ESPECIFICIDAD de un Conjunto Difuso  $A$  (Specificity):** (Yager, 1983).

- Mide la dificultad para escoger un único punto de  $A$  como representante de todo el conjunto: A mayor especificidad menor dificultad.

- **Especificidad de  $A$ :**  $Sp(A) \in [0,1]$

- $Sp(A)=1 \Leftrightarrow$  Existe un único elemento en  $\text{Soporte}(A)$  y tiene grado 1.
- $Sp(A)=0 \Leftrightarrow A(x) = 0, \forall x \in [0,1]$ .
- $A \subseteq B \Rightarrow Sp(A) \leq Sp(B)$ .

- Para un **universo finito**, tenemos que:  $Sp(A) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i - a_{i-1}}{\text{Card}(A_{a_i})}$

- Los  $a_i$  son los valores de sus  $\alpha$ -cortes.

- Siempre  $a_0 = 0$ .

- $\text{Card}(A_{a_i})$  es el número de elementos para los que  $A(x) \geq a_i$ .

- **Ejemplo:**  $A = \{0.2/a, 0.4/b, 1/c, 0.8/d, 0.3/e\}$

- $Sp(A) = (0.2-0)/5 + (0.3-0.2)/4 + (0.4-0.3)/3 + (0.8-0.4)/2 + (1-0.8)/1 = 0.498$

- Para un **universo infinito**, la sumatoria se

convierte en integral, teniendo en cuenta  $Sp(A) = \int_0^{\text{hgt}(A)} \frac{1}{\text{Card}(A_a)} da$  que el mayor  $a$  es la altura del conjunto  $A$ :

6

## MARCOS de CONOCIMIENTO

- En una aplicación con conjuntos difusos se suelen usar diversos conjuntos difusos normalizados, los cuales forman el **MARCO de CONOCIMIENTO** (*Frame of Cognition, Frame of Knowledge*):
  - Etiqueta o Marca Lingüística** (*linguistic label or linguistic landmark*): Son los distintos conjuntos difusos, con su nombre o término asociado.
- MARCO de CONOCIMIENTO A:** Definición formal de Pedrycz (1990, 1992):
  - $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\} \subseteq \mathcal{F}(X)$  Es una colección de conjuntos difusos definidos en el mismo universo  $X$ , que cumple 2 condiciones:
    - 1. Cubrimiento** (*Coverage*): " $x \in X, \forall i=1, \dots, n, / A_i(x) > 0$ ."
      - Cualquier elemento de  $X$  pertenece al menos a una etiqueta (que lo representa, en algún sentido).
      - Cubrimiento de nivel  $e \in [0,1]$ :** " $x \in X, \forall i=1, \dots, n, / A_i(x) > e$ ."
    - 2. Solidez Semántica** (*Semantic Soundness*): (de Oliveira, 1993).
      - Los  $A_i$  están normalizados y representan una parte de  $X$ , identificada por su término lingüístico.
      - Los  $A_i$  son suficientemente disjuntos: Cada término tiene un significado claramente distinto de los demás.
      - El número de conjuntos de  $A$  es pequeño: Algunos estudios psicológicos sugieren un máximo de  $7 \pm 2$ .

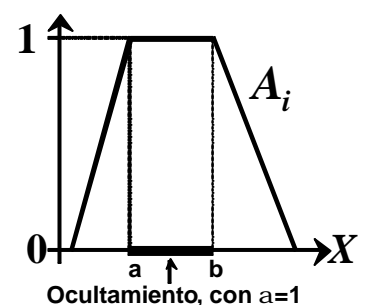
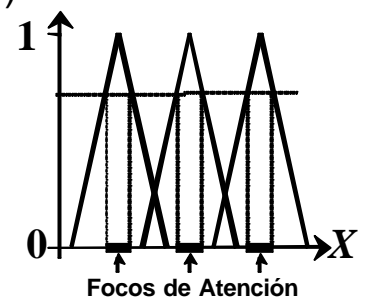
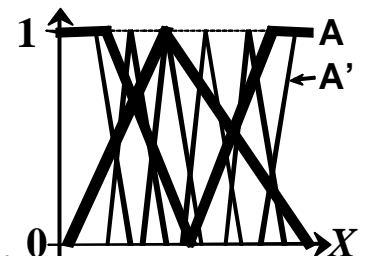
7

## MARCOS de CONOCIMIENTO

- Conceptos de los Marcos de Conocimiento:**
  - 1. Especificidad:** Un marco de conocimiento  $A$  es más específico que otro  $A'$  si todos los elementos de  $A$  son más específicos que los de  $A'$ .
    - En la Figura, la granularidad de  $A$  (líneas gruesas) es mayor que la de  $A'$  (líneas finas):  $A'$  es más específico o más fino que  $A$ .
  - 2. Foco de Atención o Ámbito de Percepción:** Es un  $\alpha$ -corte sobre un conjunto  $A_i$  de  $A$ .
  - 3. Ocultamiento de Información:**

A veces, los elementos  $z$  de una región de  $X$  son equivalentes por tener igual valor de  $A_i(z)$ .

    - El sistema de procesamiento oculta información del valor exacto de todos esos elementos de  $X$ .
    - En un trapecio como el de la Figura, si tomamos su 1-corte, tenemos que se hacen indistinguibles todos los valores en el intervalo  $[a,b]$  sobre un conjunto  $A_i$  de  $A$ .



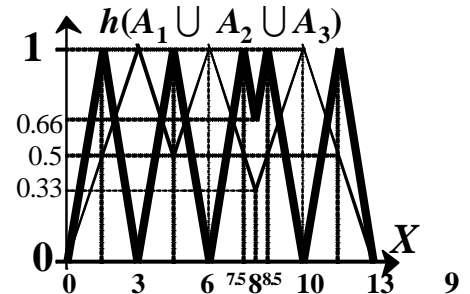
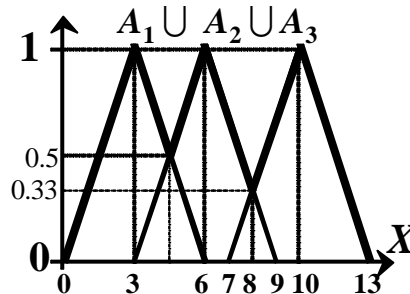
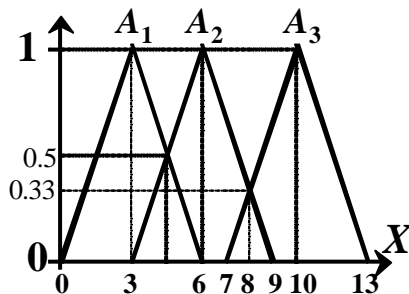
8

## Ejemplo: Entropía y Energía en A

- Sea un código **A**, con 3 elementos triangulares ( $\pm 3$ ):  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$ .
  - Entropía y Energía del código:**  $H(A) = \sum_{i=1}^n H(A_i)$ ;  $E(A) = \sum_{i=1}^n E(A_i)$ ;
  - Para calcular la Entropía y la Energía, usaremos la función  $h$  lineal y la función  $e$  identidad respectivamente. Con esto conseguimos que:

$$H(A_i) = E(A_i) = \int_x A_i(x) dx = \text{Area de } A_i$$

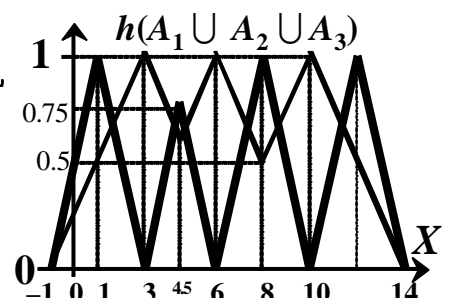
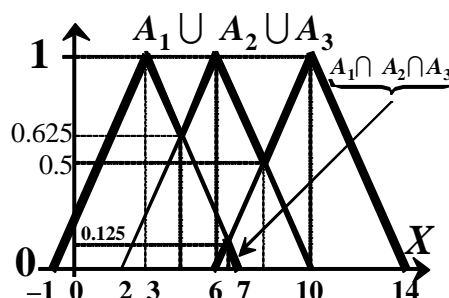
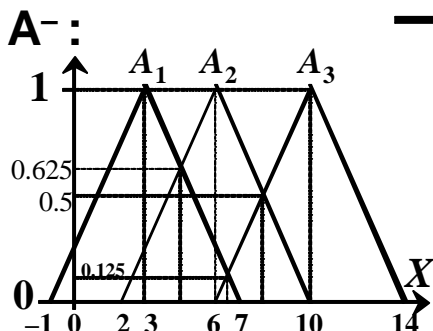
- Entropía:**
  - Del código **A**:  $H(A) = H(A_1) + H(A_2) + H(A_3) = 3 + 3 + 3 = 9$ ;
  - De la Unión:  $H(\cup A_i) = \int_0^6 h(\cup A_i) + \int_6^{10} h(\cup A_i) + \int_{10}^{13} h(\cup A_i) = 3 + 2(0.75 + 0.5) + 1.5 = 7$ ;
  - Intersección:  $H(\cap A_i) = H(\emptyset) = 0$ ;
- Energía:**
  - Del código **A**:  $E(A) = E(A_1) + E(A_2) + E(A_3) = 3 + 3 + 3 = 9$ ;
  - De la Unión:  $E(\cup A_i) = 9 - 0.75 - 0.33 = 7.92$ ;
  - Intersección:  $E(\cap A_i) = E(\emptyset) = 0$ ;



## Ejemplo: Entropía y Energía en A

- Si llamamos **A<sup>+</sup>** al resultado de **aumentar la especificidad** de los elementos de **A** ( $x_i \pm 2$ ) y **A<sup>-</sup>** al resultado de **reducirla** ( $x_i \pm 4$ ):

	<b>A<sup>+</sup></b>	<b>A<sup>-</sup></b>
<b>Entropía:</b>		
Del código <b>A</b> :	$H(A)$ 2 + 2 + 2 = 6;	4 + 4 + 4 = 12;
De la Unión:	$H(\cup A_i)$ 6 - 0.25 = 5.75;	2 + (3 · 0.75)/2 + 2 + 2 = 7.125;
Intersección:	$H(\cap A_i)$ $H(\emptyset) = 0$ ;	(2 · 0.125)/2 = 0.125;
<b>Energía:</b>		
Del código <b>A</b> :	$E(A)$ 2 + 2 + 2 = 6;	4 + 4 + 4 = 12;
De la Unión:	$E(\cup A_i)$ 6 - 0.25/2 = 5.875;	12 - 5 · 0.625/2 - 1 = 9.44;
Intersección:	$E(\cap A_i)$ $E(\emptyset) = 0$ ;	0.125/2 = 0.0625;



## Codificar/ Decodificar Información

- En ocasiones, el **sistema difuso de procesamiento** necesita:
  - 1. “**Codificar**” un dato  $E$  según un código  $A$ : Esta tarea suele llamarse **DIFUMINAR** (*fuzzification*).
  - 2. **Procesarlo** de alguna forma (enviarlo por un canal de procesamiento).
  - 3. “**Decodificar**” el dato obtenido según el código  $A$ : Esta tarea suele llamarse **CONCRETAR** (*defuzzification*) y obtenemos  $\hat{E}$ .
- Esquemas de CODIFICACIÓN DIFUSA:** Existen diversos sistemas de difuminación. El más importante es el siguiente:
  - DIFUMINACIÓN usando Medidas de Posibilidad/Necesidad:**
    - POSIBILIDAD**  $\text{Poss}(A_i, E)$ : Expresa el grado con el que el dato  $E$  está superpuesto (intersecciona) con algún componente  $A_i$  del código  $A$ .  
Se usa la medida  $l$  definida como:  $l = \text{Poss}(A_i, E)$ .
    - NECESIDAD**  $\text{Nec}(A_i, E)$ : Expresa el grado con el que el dato  $E$  está incluido en algún  $A_i \in A$ . Medida  $m$ :  $m = 1 - \text{Nec}(A_i, E) = \text{Poss}(\neg A_i, E)$ .
    - RESULTADO:** Un vector de posibilidades y necesidades con respecto a todos los  $A_i \in A$  (Dubois, Prade, 1988):  
 $\{\text{Poss}(A_1, E), \dots, \text{Poss}(A_n, E), \text{Nec}(A_1, E), \dots, \text{Nec}(A_n, E)\}$

11

## Codificar/ Decodificar Información

- Usamos las siguientes medidas, donde  $A \in A$ , y donde  $E$  es el dato de entrada que codificamos:
 

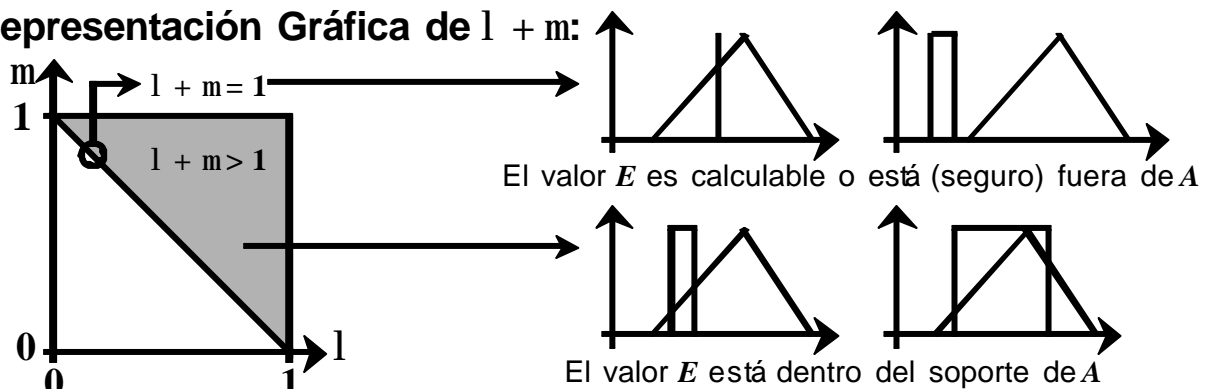
$l = \text{Poss}(A, E);$   
 $m = 1 - \text{Nec}(A, E) = \text{Poss}(\neg A, E);$

  - Tres casos posibles:**
    - 1.  $l + m = 1$      $\vdash$     **No hay incertidumbre.**
    - 2.  $l + m > 1$      $\vdash$     **Conflicto:** Es posible que  $E$  sea  $A$  y  $\neg A$ .
    - 3.  $l + m < 1$      $\vdash$     **Ignorancia:**  $E$  puede ser o no  $A$  (falta información).

- Cuanto **mayor** sea la distancia de  $(l + m)$  con  $1$ , **mayor incertidumbre** (conflicto o ignorancia).

- Cuanto **mayor** es el valor  $(l + m)$ , **menor** es la **especificidad** de  $E$ .

- Representación Gráfica de  $l + m$ :**



12

## Mecanismos de Decodificación

- **Requisito IDEAL de la Decodificación:** Que el resultado de la decodificación sea igual al valor original codificado.
  - Si  $F$  es la función de codificación y  $F^{-1}$  la de decodificación, el objetivo es que:  $F^{-1}(F(E)) = E$ .
  - Ese requisito es **muy difícil de conseguir**.
- **Existen multitud de sistemas de decodificación:**
  - El sistema a elegir depende del código  $A$  empleado.
  - En general se emplean **sólo las medidas de posibilidad**, pues simplifica los cálculos y los hacen más intuitivos.
- **DECODIFICACIÓN para Datos *crisp* o Puntuales** (*Pointwise Data*): Sólo conocemos los valores de posibilidad (o necesidad) de cierto dato y queremos reconstruir dicho dato de forma que sea coherente con ellos.
  - **Dos familias básicas de sistemas para Decodificación:**
    - Que usan los **valores modales** de los conjuntos difusos del código: Valores con la altura de cada conjunto difuso (los núcleos).
    - Que usan el **área de pertenencia** de los elementos del código.

13

## Decodificación con valores modales

- **CENTRO de GRAVEDAD** puntual:  $\longrightarrow$   
donde  $a_i$  es un valor modal del conjunto  $A_i \in A$  y  $x$  es el valor que queremos aproximar.

$$F^{-1}(F(x)) = \hat{x} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i(x) a_i}{\sum_{i=1}^n A_i(x)}$$

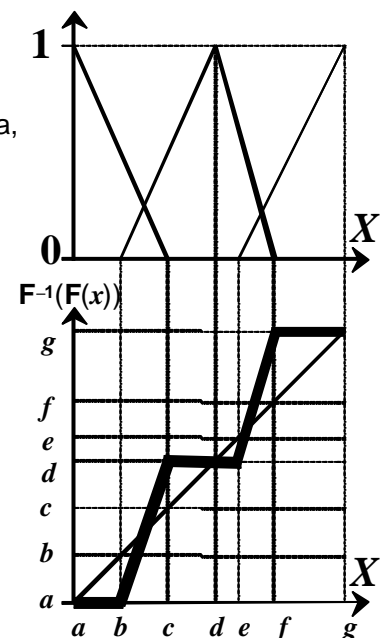
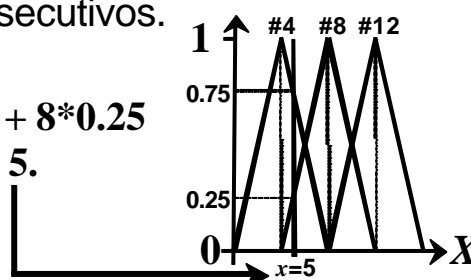
- Este método obtiene, en general, un **valor aproximado de  $x$** .

- Por ejemplo, si las etiquetas de  $A$  intersectan en valores menores a  $1/2$ , se produce un **efecto escalera** al decodificar: Ver Figura a la derecha, donde la recta diagonal es la **reconstrucción ideal**:  $F^{-1}(F(x)) = x$ .

- Sin embargo, se consigue un **valor exacto** cuando el código está formado por **conjuntos difusos triangulares que se cortan en  $1/2$  de altura** cada dos conjuntos consecutivos.

- Ejemplo:

$$\begin{aligned} F^{-1}(x) &= 4 * 0.75 + 8 * 0.25 \\ &= 3 + 2 = 5. \end{aligned}$$



14

## Decodificación con valores modales

### EXPANSIÓN POLINOMIAL:

$$\hat{x} = \frac{\sum_{i=1}^n [p_{i0} + p_{i1}A_i(x) + p_{i2}A_i^2(x) + \dots] a_i}{\sum_{i=1}^n [p_{i0} + p_{i1}A_i(x) + p_{i2}A_i^2(x) + \dots]}$$

- $a_i$  es un valor modal del conjunto  $A_i$  del código  $A$ .
- Los valores modales no son sólo ponderados por los valores de posibilidad  $A_i(x)$ , sino por un **polinomio** con sus potencias.

### EXPANSIÓN LINGÜÍSTICA:

$$\hat{x} = \frac{\sum_{i=1}^n [p_{i1}A_i(x) + p_{i2}A_i^2(x) + p_{i3}A_i^{1/2}(x)] a_i}{\sum_{i=1}^n [p_{i1}A_i(x) + p_{i2}A_i^2(x) + p_{i3}A_i^{1/2}(x)]}$$

- Los valores modales son ponderados con los valores de posibilidad  $A_i(x)$ , y con sus **modificadores lingüísticos**:
  - **Concentración, “Mucho”**:  $A_i^2(x)$ .
  - **Dilatación, “Más o menos”**:  $A_i^{1/2}(x)$ .
- Estos dos últimos sistemas **no están libres de error**, incluso con etiquetas triangulares de cualquier tipo.

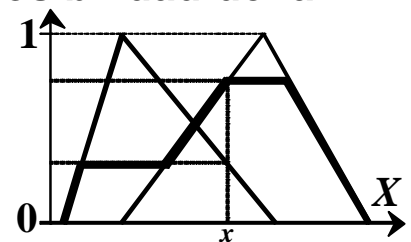
15

## Decodificación con Funciones de $A$

- Se forma un nuevo conjunto difuso  $A$  usando las funciones de pertenencia del código  $A$  y los valores de posibilidad de la codificación:

$$B_i = A_i \cap L_i \longrightarrow A = \bigcup_{i=1}^n B_i$$

donde  $\Lambda_i$  (*lambda*) es el conjunto difuso que toma el valor  $A_i(x)$  en todo el universo del código  $A$ .



- A partir de ese nuevo conjunto, pueden aplicarse distintos métodos, entre los que se encuentran los siguientes principalmente:

- 1. **Media de Máximos** (MoM): Se calcula la media de los valores que maximizan el conjunto  $A$ .

- 2. **Centro de Gravedad** (CoG):

Se calcula el centro de gravedad de  $A$ :

$$\hat{x} = \frac{\int_x A(x)x \, dx}{\int_x A(x) \, dx}$$

- 3. **Centro de Área** (CoA): Se calcula el valor que iguala el área de  $A$  que queda a la izquierda y a la derecha:

$$\int_{-\infty}^{\hat{x}} A(x) \, dx = \int_{\hat{x}}^{\infty} A(x) \, dx$$

16



## Decodificación con Funciones de A

- Hay multitud de otros métodos basados en los anteriores:
  - Primer Máximo:** Se calcula el menor valor de los que maximizan A.
  - Último Máximo:** Se calcula el mayor valor de los que maximizan A.
  - CoG de valores importantes:** Se calcula el CoG pero evitando aquellas partes de A que tengan una altura menor a cierto nivel b.
  - CoA de valores importantes:** Se calcula el CoA pero ignorando aquellas partes de A que tengan una altura menor a cierto nivel b.
  - CoG potenciado por un factor d:**
    - d = 1 : CoG normal.
    - d ® 0 : Tiende a MoM.

$$\hat{x} = \frac{\int_x A^d(x) x dx}{\int_x A^d(x) dx}$$

- Otros métodos utilizan directamente los **conjuntos**  $B_i$  y sus **características** (y no la unión de los  $B_i$ ):
  - $G_i$  : MoM de  $B_i$  (**Punto de Máximo Criterio**):  $G_i = \frac{\sum_{i=1}^r M_i : M_i = \max_{x \in X} B_i(x)}{r}$
  - $S_i$  : **Área** o Superficie del conjunto  $B_i$ .
  - $W_i$  : **Centro de Gravedad** del conjunto  $B_i$ :  $W_i = \frac{\int_x B_i(x) x dx}{\int_x B_i(x) dx}$
  - $H_i$  : **Altura** del conjunto  $B_i$ .
- NOTA: El Punto de Máximo Criterio es un valor modal y el Centro de Gravedad no.

17

## Decodificación con Funciones de A

n es el número de conjuntos  $A_i \hat{I} A$ .

- Métodos basados en el Centro de Gravedad (CoG):**
  - CoG ponderado por el área:**  $\hat{x} = \sum_{i=1}^n S_i \cdot W_i / \sum_{i=1}^n S_i$
  - CoG ponderado por la altura:**  $\hat{x} = \sum_{i=1}^n H_i \cdot W_i / \sum_{i=1}^n H_i$
- Métodos basados en el Punto de Máximo Criterio (PMC):**
  - PMC ponderado por el área:**  $\hat{x} = \sum_{i=1}^n S_i \cdot G_i / \sum_{i=1}^n S_i$
  - PMC ponderado por la altura:**  $\hat{x} = \sum_{i=1}^n H_i \cdot G_i / \sum_{i=1}^n H_i$
  - Media de PMC:**  $\hat{x} = \sum_{i=1}^n G_i / m$ , donde m es el número de  $B_i$  con  $G_i > 0$
  - Media del mínimo y máximo PMC:**

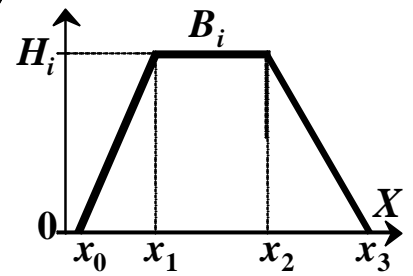
$$G_{\min} = \min_i \{G_i\}; \quad G_{\max} = \max_i \{G_i\}; \quad \hat{x} = \frac{G_{\min} + G_{\max}}{2}$$

- Métodos basados en el Conjunto Más Importante:**
  - CoG del  $B_i$  de mayor área:**  $\hat{x} = W_j : A_j = \max_{i=1, \dots, n} \{S_i\}$
  - CoG del  $B_i$  de mayor altura:**  $\hat{x} = W_j : A_j = \max_{i=1, \dots, n} \{H_i\}$
  - PMC del  $B_i$  de mayor área:**  $\hat{x} = G_j : A_j = \max_{i=1, \dots, n} \{S_i\}$
  - PMC del  $B_i$  de mayor altura:**  $\hat{x} = G_j : A_j = \max_{i=1, \dots, n} \{H_i\}$

18

## CoG $W_i$ de un Trapecio Extendido

$$W_i = \frac{AreaX_i}{Area_i} = \frac{\int_x B_i(x)x dx}{\int_x B_i(x) dx}$$



- Si el conjunto  $B_i$  es un **Trapecio** con altura  $H_i$ :

$$Area_i = \int_x B_i(x) dx = H_i \left( \frac{x_1 - x_0}{2} + x_2 - x_1 + \frac{x_3 - x_2}{2} \right) = H_i \left( \frac{x_3 + x_2 - x_1 - x_0}{2} \right);$$

$$AreaX_i = \int_x B_i(x)x dx = H_i \left( \frac{2x_1^2 - x_1x_0 - x_0^2}{6} + \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} + \frac{x_3^2 - x_3x_2 - 2x_2^2}{6} \right) =$$

$$= H_i \left( \frac{x_3^2 + x_2^2 - x_1^2 - x_0^2 + x_3x_2 - x_1x_0}{6} \right);$$

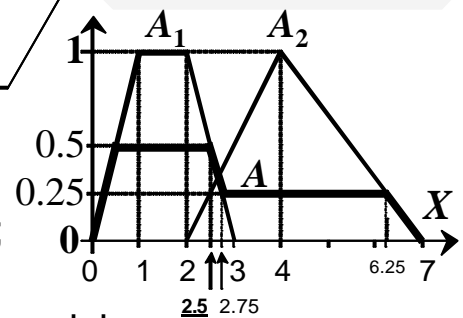
- Si  $B_i$  es un **Trapecio Extendido**, con  $m + 1$  puntos:  $\{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ , donde en los extremos el grado es cero:  $B_i(x_0) = B_i(x_m) = 0$ .

$$Area_i = \int_x B_i(x) dx = \sum_{j=1}^{m-1} B_i(x_j) \left[ \frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{2} \right];$$

$$AreaX_i = \int_{x_0}^{x_m} B_i(x)x dx = \sum_{j=1}^{m-1} B_i(x_j) \left[ \frac{x_{j+1}^2 - x_{j-1}^2 + x_j x_{j+1} - x_j x_{j-1}}{6} \right];$$

19

## Ejemplos de Decodificaciones



- Sea un **código A**, con dos conjuntos  $A_1$  y  $A_2$ :
  - Codificamos 2.5**:  $A_1(2.5)=0.5$ ,  $A_2(2.5)=0.25$ ;
  - Ptos. Máx. Criterio:  $PMC(A_1)=1.5$ ,  $PMC(A_2)=4$ ;
- Decodificamos**, usando distintas técnicas:
  - CoG puntual**, usando los PMC como valores modales:
 
$$(0.5 \cdot 1.5 + 0.25 \cdot 4) / 0.75 = \underline{2.3};$$
  - Usando la función  $A = B_1 \cup B_2$** :
    - MoM**: Los máximos están en  $[0.5, 2.5]$ . Su media es: 1.5;
    - Primer Máximo**: 0.5; **Último Máximo**: 2.5;
    - CoG**:  $AreaX(A)/Area(A) = 6.279/3.125 = \underline{2.01}$ ;
    - CoG de valores importantes con  $b=0.25$** : 1.5;
  - Usando  $B_1$  y  $B_2$** :  $G_1=W_1=1.5$ ;  $G_2=4$ ;  $W_2=4.44$ ;  $H_1=0.5$ ;  $H_2=0.25$ ;  $S_1=1.25$ ;  $S_2=1.09$ ;
    - CoG ponderado por el área**:  $(1.25 \cdot 1.5 + 1.09 \cdot 4.44) / (1.25 + 1.09) = \underline{2.87}$ ;
    - CoG ponderado por la altura**:  $(0.5 \cdot 1.5 + 0.25 \cdot 4.44) / (0.5 + 0.25) = \underline{2.48}$ ;
    - PMC ponderado por el área**:  $(1.25 \cdot 1.5 + 1.09 \cdot 4) / (1.25 + 1.09) = \underline{2.66}$ ;
    - PMC ponderado por la altura**:  $(0.5 \cdot 1.5 + 0.25 \cdot 4) / (0.5 + 0.25) = \underline{2.33}$ ;
    - Media de PMC** (o del mínimo y máximo PMC):  $(1.5 + 4) / 2 = \underline{2.75}$ ;
    - CoG (o PMC) del  $B_i$  de mayor área (o de mayor altura)**: 1.5;

20

## RELACIONES DIFUSAS

- **Relación clásica (crisp) entre dos universos de discurso  $X$  e  $Y$ :**
  - Es un subconjunto del producto cartesiano:  $R: X \times Y \rightarrow \{0,1\}$ .
    - $R(x,y)=1 \iff (x,y) \in R$ : Los dos elementos están relacionados (*related*).
    - $R(x,y)=0 \iff (x,y) \notin R$ : Los elementos no están relacionados (*unrelated*).
  - Ejemplos: Igual( $x,y$ )= $\{(x,y) \mid x=y\}$ ; Menor( $x,y$ )= $\{(x,y) \mid x < y\}$ ;
  - Relaciones n-arias: Relacionan elementos de  $n$  universos.
- **Relación difusa entre dos universos de discurso  $X$  e  $Y$ :**
  - Subconjunto difuso del producto cartesiano:  $R: X \times Y \rightarrow [0,1]$ .
    - Ejemplo:  $x$  es similar a  $y$  (con  $\beta > 0$ ):  $R(x,y) = \begin{cases} \exp(-|x-y|^2/\beta) & \text{si } |x-y| \leq 5 \\ 0 & \text{si } |x-y| > 5 \end{cases}$
    - Dos elementos pueden pertenecer a la relación parcialmente.
  - En universos discretos se representan por matrices de valores en el intervalo  $[0,1]$ , por grafos dirigidos o por imágenes sombreadas. Ejemplo:

	$x$	$y$	$z$
$a$	0	0.5	1
$b$	1	0.8	0
$c$	0.5	0.5	0.2

21

## RELACIONES DIFUSAS

- **Operaciones sobre Relaciones Difusas:**
  - Unión:  $(R \cup W)(x,y) = R(x,y) \mathbf{s} W(x,y)$  (usando una **s-norma**).
  - Intersección:  $(R \cap W)(x,y) = R(x,y) \mathbf{t} W(x,y)$  (usando una **t-norma**).
  - Complemento:  $(\neg R)(x,y) = 1 - R(x,y)$ .
  - Trasposición:  $R^T(x,y) = R(y,x)$  (si  $X$  e  $Y$  tienen el mismo universo).
    - Se cumple que:
      - \*  $(R^T)^T = R$
      - \*  $(\neg R)^T = \neg(R^T)$
  - Composición de dos Relaciones Difusas  $G$  y  $W$ : Una relación  $G$  definida en  $X \times Z$ , y otra relación  $W$  definida en  $Z \times Y$ , pueden componerse para conseguir una relación  $R$  definida en  $X \times Y$ :
    - Composición sup-t:  $R(x,y) = \sup_{z \in Z} \{G(x,z) \mathbf{t} W(z,y)\}$ ;
    - Composición inf-s:  $R(x,y) = \inf_{z \in Z} \{G(x,z) \mathbf{s} W(z,y)\}$ ;
- **Propiedades sobre Relaciones Difusas:** " $x \in X$ ", " $y \in Y$ "
  - Igualdad :  $R = W \iff R(x,y) = W(x,y)$ .
  - Inclusión:  $R \subseteq W \iff R(x,y) \leq W(x,y)$ .

22

## ***Bibliografía***

- A. De Luca, S. Termini, "Entropy of L-Fuzzy Sets". Inf. and Control, 24, pp. 55-73, 1974.
- J.V. De Oliveira, "On Optimal Fuzzy Systems with I/O interfaces". Proc. 2nd International Conference on Fuzzy Systems, San Francisco, 1993.
- D. Dubois, H. Prade, "Possibility Theory: An Approach to Computerized Processing of Uncertainty". Plenum Press, New York, 1988.
- B.R. Ebanks, "On Measures of Fuzziness and their Representations". J. Math. Analysis and Applications, 94, pp. 24-37, 1983.
- W. Pedrycz, "Numerical and Applicational Aspects of Fuzzy Relational Equations". Fuzzy Sets and Systems, 11, pp. 1-18, 1983.
- W. Pedrycz, "Fuzzy Sets Framework for Development of Perceptio Perspective". Fuzzy Sets and Systems, 37, pp. 123-137, 1990.
- W. Pedrycz, "Selected Issues of Frame of Knowledge Representation Realized by Means of Linguistic Labels". Int. Journal of Intelligent Systems, 7, pp.155-170, 1992.
- C.E. Shannon, W.W. Weaver, "The Mathematical Theory of Communication". Urbana, University of Illinois Press, 1949.
- R. Yager, "Entropy and Specificity in a Mathematical Theory of Evidence". Int. Journal General Systems, 9, pp. 249-260, 1983.
- L.A. Zadeh, "Fuzzy Sets and Information Granularity". In Advances in Fuzzy Set Theory and Applications, eds. M. Gupta, R. Ragade, R.R. Yager, pp. 3-18. Amsterdam, 1979.