I

FUNDAMENTOS DE LÓGICA Y CONTROL DIFUSO

1

Introducción a la Lógica Difusa *(Fuzzy Logic)*

En el presente capítulo se trata de exponer al lector las nociones fundamentales, operaciones, conceptos, métodos y principios subyacentes de la Lógica Difusa que le permitan situarse en el marco de una Lógica Multivaluada *(Many-Valued Logic)*; donde no sólo una expresión puede ser *cierta* o *falsa*, sino que permite cuantificar en qué medida lo es.

1.1 Significado y Origen

Antes de comenzar describiendo brevemente la lógica difusa y su origen preguntémonos ¿qué significa *fuzzy*?; término sobre el cual se sustenta una forma de expresar las leyes, modos y formas del conocimiento científico (lógica).

Originalmente el término *fuzzy* procede de *fuzz*, que sirve para denominar la pelusa que recubre el cuerpo de los polluelos al poco de salir del huevo. Este término en inglés significa "confuso, borroso, no definido o desenfocado". Este término se traduce por *"flou"* en francés y se pronuncia *"aimai"* en japonés. La traducción de esta palabra al castellano es difuso o borroso, aunque *fuzzy*, en los ámbitos académico y tecnológico, está aceptado tal cual, de forma similar a como los es *"bit"*. *Fuzzy* significa ambiguo o vago, en el sentido del razonamiento humano, más que en la acepción de probabilidad de algo.

La lógica difusa nació cuando el Profesor Lotfi A.Zadeh publicó un artículo titulado *"Fuzzy Sets"* (Conjuntos Difusos) [Zadeh65]. En este artículo el Dr. Zadeh presentó unos conjuntos sin límites precisos los cuales, según él, juegan un importante papel en el reconocimiento de formas, interpretación de significados, y especialmente abstracción, la esencia del proceso de razonamiento del ser humano.

En la lógica clásica sólo es posible tratar información que sea totalmente cierta o totalmente falsa; no le es posible manipular aquella información imprecisa o incompleta inherente a un problema y como información que es contiene datos que permitirían una mejor resolución del mismo. Con ello se podría decir que la lógica difusa es una extensión de los sistemas clásicos, como el propio Zadeh indica en [Zadeh92]. La lógica difusa es la lógica que soporta modos de razonamiento aproximados en lugar de exactos. Su importancia radica en que muchos modos de razonamiento humano, en especial el razonamiento según el sentido común, son aproximados por naturaleza.

Esta lógica es una lógica multievaluada, sus características principales, presentadas por Zadeh en la referencia antes mencionada son:

- En la lógica difusa, el razonamiento exacto es considerado como un caso particular del razonamiento aproximado.
- Cualquier sistema lógico puede ser trasladado a términos de lógica difusa.
- En lógica difusa, el conocimiento es interpretado como un conjunto de restricciones flexibles, es decir, difusas, sobre un conjunto de variables.
- La inferencia[1] es considerada como un proceso de propagación de dichas restricciones.
- En lógica difusa, todo problema es un problema de grados.

La lógica difusa se ha convertido en un tema muy común en control de máquinas como el resultado de hacerlas más "capaces" y "responsables". Se podría decir que la lógica difusa permite a los ordenadores trabajar no sólo con métodos cuantitativos sino también cualitativos, se trata pues de un intento de aplicar una forma más humana de pensar en la programación de computadoras.

1.2 Teoría de Conjuntos Difusos

En este apartado se va a introducir algunas nociones elementales sobre la teoría de conjuntos difusos, así como la notación utilizada al respecto a lo largo de esta memoria. En este resumen nos detendremos en los aspectos semánticos y de representación relacionadas con esta potente herramienta. En la literatura podemos encontrar una gran cantidad de trabajos sobre esta teoría, como en [Yager87] donde se puede encontrar una recopilación de algunos de los artículos más interesantes publicados sobre el tema por L.A. Zadeh. En [Dubois80, Dubois88, Zimm91] es posible encontrar recopilados los aspectos más importantes que constituyen la teoría de conjuntos difusos así como la teoría de la posibilidad. Una más moderna síntesis de los conjuntos difusos y sus aplicaciones puede verse en [Kruse94, McNeill94, Mohmmd93] y sobre todo en [Predycz98].

[1] Proceso por el cual se llega a un resultado, obtener consecuencias o deducir una cosa de otra.

1.2.1 Conjuntos Difusos (Fuzzy-Sets)

Los Conjuntos Difusos son una generalización de los (sub)conjuntos clásicos en el sentido de que los amplían pues permiten la descripción de nociones "vagas" e "imprecisas". Relajan la restricción de los conjuntos clásicos de pertenencia o no-pertenencia absoluta al mismo. Es necesario hacer notar que muchos de estos conceptos con naturaleza "imprecisa", si no todos, responden a criterios subjetivos. Esto es, la definición de esa imprecisión depende en mayor o menor medida de la persona que la expresa. Dicha generalización nos lleva a que:

- La pertenencia de un elemento a un conjunto pasa a ser un concepto *"difuso o borroso"*. Para algunos elementos puede no estar clara su pertenencia o no al conjunto.

- Dicha pertenencia puede ser cuantificada por un grado. Dicho grado se denomina habitualmente como **"grado de pertenencia"** de dicho elemento al conjunto y toma un valor en el intervalo $[0,1]\in\Re$ por convenio.

Nótese la gran potencialidad que presenta este último punto al permitir expresar de forma cuantitativa algo cualitativo (difuso) mediante el grado de pertenencia. De forma más formal podemos definir un conjunto difuso como sigue:

Definición 1.1 *Un* ***Conjunto Difuso*** *A sobre un universo de discurso Ω (intervalo finito o infinito dentro del cual el conjunto difuso puede tomar un valor) es un conjunto de pares*

$$A = \{\mu A(x) / x : x \in \Omega, \mu A(x) \in [0,1] \in \Re\} \tag{1.1}$$

donde $\mu A(x)$ *se denomina* ***grado de pertenencia*** *del elemento x al conjunto difuso A. Este grado oscila entre los extremos* ***0*** *y* ***1*** *del dominio de los nº reales:*

$\mu A(x) = 0$ *indica que x no pertenece en absoluto al conjunto difuso A.*

$\mu A(x) = 1$ *indica que x pertenece totalmente al conjunto difuso A.*

A veces, en vez de dar una lista exhaustiva de todos los pares que forman el conjunto (valores discretos), se da una definición para la función $\mu A(x)$*, llamada función característica o* ***función de pertenencia.***

←

Si la función de pertenencia sólo produce valores del conjunto {0,1}, entonces el conjunto que genera no es difuso, sino "Crisp" [2].

De la definición de conjunto difuso se derivan los siguientes conceptos:

- **Universo de Discurso:** Como se ha mencionado anteriormente existen dos posibilidades a la hora de establecer el intervalo de valores válido para el conjunto difuso y son:

  - A través de un universo de discurso *finito o discreto:*

    $$\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

    un conjunto difuso A se puede representar como:

    $$A = \mu_1 / x_1 + \mu_2 / x_2 + \ldots + \mu_n / x_n \tag{1.2}$$

    donde μ_i representa el grado de pertenencia del elemento x_i, con i=1,2,..,n. Habitualmente los elementos con grado cero no se listan. Aquí el + no hace el papel de la suma aritmética sino que tiene el sentido de agregación y la / no es el operador de división sino que tiene el significado de asociación de ambos valores.

  - Y al expresar el conjunto difuso a través de su función de pertenencia en un universo de discurso *infinito*, así un conjunto difuso A sobre Ω puede representarse como:

    $$A = \int \mu_A(x) / x \tag{1.3}$$

- **Etiqueta Lingüística:** Es aquella palabra, en lenguaje natural, que expresa o *identifica a un conjunto difuso*, que puede estar formalmente definido o no. Así la función de pertenencia de un conjunto difuso A, $\mu_A(x)$, expresa el grado en que x verifica la categoría especificada por A.

  Con esta definición, podemos asegurar que en nuestra vida cotidiana utilizamos multitud de etiquetas lingüísticas para expresar conceptos abstractos: "joven", "viejo", "frío", "caliente", "barato", "caro", "limpio", "sucio"...

[2] Podría traducirse por un valor concreto, preciso.

Además, la definición intuitiva de esas etiquetas, no sólo puede variar de un individuo a otro y del momento particular, sino que también varía del contexto en el que se aplique. Por ejemplo, *seguramente* no medirán la misma altura una persona "alta" y un edificio "alto".

La representación de conjuntos difusos puede ser variada y depende, fundamentalmente de la naturaleza del universo de discurso (establece el contexto) sobre el que definamos el conjunto difuso.

Ejemplo 1.1: Para ilustrar lo mencionado anteriormente tómese como ejemplo el siguiente caso:

Si expresamos el concepto cualitativo "joven" mediante un conjunto difuso, donde el eje de abcisas (eje X) representa el universo de discurso *edad* y el eje de ordenadas (eje Y) representa los grados de pertenencia en el intervalo [0,1]. El conjunto difuso que representa dicho concepto podría expresarse en la forma siguiente, considerando un universo discreto:

Joven = {1/0,..., 1/20, 1/25, 0.9/26, 0.8/27, 0.7/28, 0.6/29, 0.5/30,..., 0.1/34}

La "edad" (en años enteros) sería el universo de discurso de "joven". La etiqueta lingüística "joven" identificaría a este conjunto difuso representado por una función de pertenencia si consideramos un universo de discurso no discreto, de otros como "adulto", "viejo"..., de esta forma según la Figura 1.1:

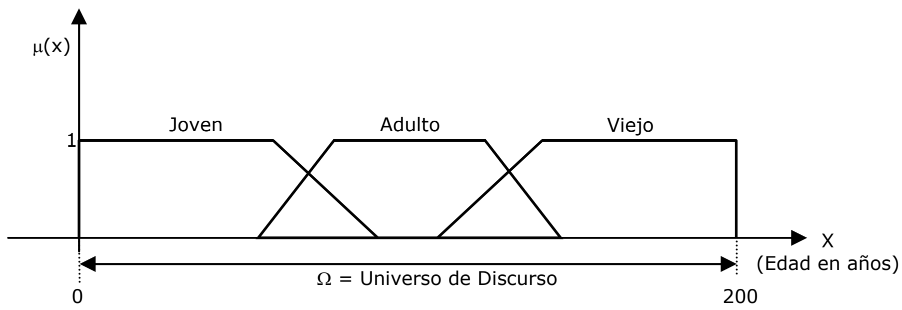


Figura 1.1: Gráfico que ilustra tres etiquetas lingüísticas (Ejemplo 1.1).

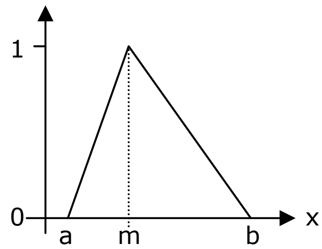
1.2.1.1 Tipos de Funciones de Pertenencia

Según la forma de la función de pertenencia, se tendrá distintas clases de conjuntos difusos. Zadeh propuso una serie de funciones de pertenencia que se podrían clasificar en dos grupos, las formadas por líneas rectas "lineales" y las que presentan formas gaussianas, es decir, "curvas".

A continuación se comentan estos tipos de funciones de pertenencia propuestos por Zadeh, estos tipos de conjuntos difusos son los denominados conjuntos difusos *convexos* en la teoría de conjuntos difusos, finalizando con la aportación por nuestra parte de la función *trapecio extendido* la cual podríamos clasificar como una función lineal *no convexa*, es decir, una función que alternativamente es creciente y decreciente en su dominio.

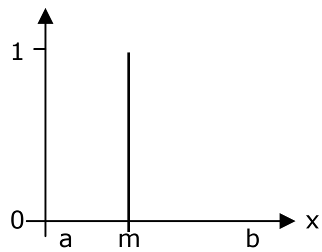
1. **Triangular:** Definido por sus límites inferior **a** y superior **b**, y el valor modal **m**, tal que **a<m<b.**

$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le a \\ (x-a)/(m-a) & \text{si } x \in (a, m] \\ (b-x)/(b-m) & \text{si } x \in (m, b) \\ 1 & \text{si } x \ge b \end{cases}$$



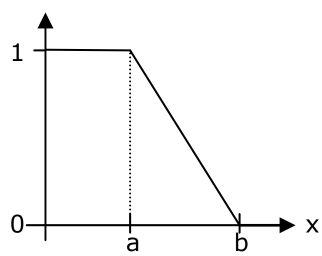
2. **Singleton:** Toma el valor cero en todo el universo de discurso salvo en el punto m donde toma el valor 1.

$$SG(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \ne m \\ 1 & \text{si } x = m \end{cases}$$



3. **Función L:** Se trata de una función definida por dos parámetros de la siguiente forma:

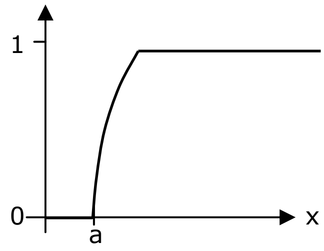
$$L(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \le a \\ \dfrac{a-x}{b-a} & \text{si } a < x \le b \\ 0 & \text{si } x > b \end{cases}$$



4. **Función Γ (Gamma):** Definida por su límite inferior **a** y el valor **k>0**. Dos definiciones:

$$\Gamma(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le a \\ 1 - e^{-k(x-a)^2} & \text{si } x > a \end{cases}$$

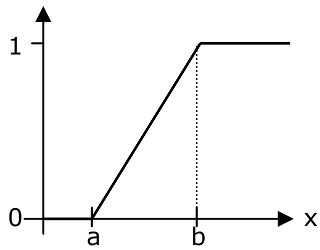
$$\Gamma(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le a \\ \dfrac{k(x-a)^2}{1+k(x-a)^2} & \text{si } x > a \end{cases}$$



- Esta función se caracteriza por un rápido crecimiento a partir de **a**.
- Cuanto mayor es el valor de **k**, el crecimiento es más rápido aún.
- La primera definición tiene un crecimiento más rápido que la segunda.
- Asíntota horizontal en 1.

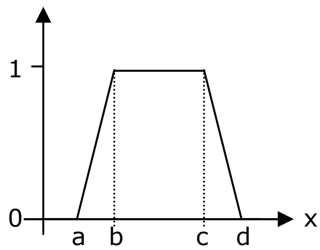
De forma lineal también se expresa la función gamma como:

$$\Gamma(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x \le b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$



5. **Función Trapezoidal:** Definida por sus límites inferior **a** y superior **d**, y los límites de su núcleo, **b** y **c**, inferior y superior respectivamente.

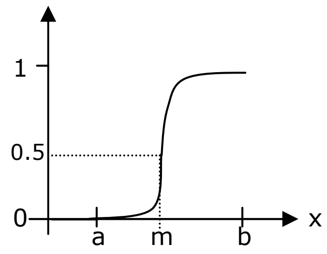
$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x \le a) \text{ o } (x \ge d) \\ (x-a)/(b-a) & \text{si } x \in (a,b] \\ 1 & \text{si } x \in (b,c) \\ (d-x)/(d-c) & \text{si } x \in (b,d) \end{cases}$$



6. **Función S:** Definida por sus límites inferior **a** y superior **b**, y el valor **m**, o punto de inflexión tal que **a<m<b**.

- Un valor típico es: **m=(a+b) / 2.**
- El crecimiento es más lento cuanto mayor sea la distancia **a-b**.

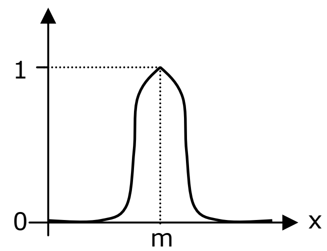
$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le a \\ 2\{(x-a)/(b-a)\}^2 & \text{si } x \in (a, m] \\ 1 - 2\{(x-a)/(b-a)\}^2 & \text{si } x \in (m, b) \\ 1 & \text{si } x \ge b \end{cases}$$



7. **Función Gaussiana:** Definida por su valor medio **m** y el valor de **k>0**.

$$G(x) = e^{-k(x-m)^2}$$

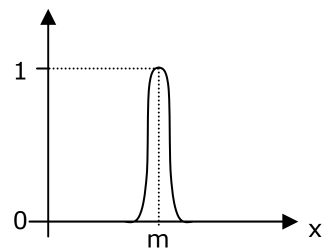
- Es la típica campana de Gauss.
- Cuanto mayor es **k**, más estrecha es la campana.



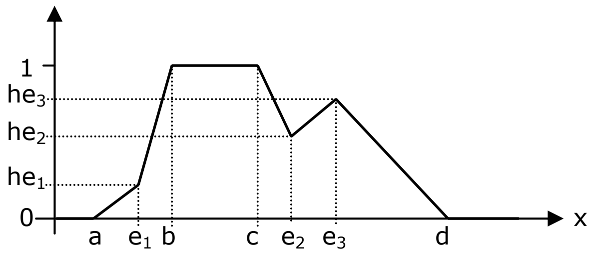
8. **Función Pseudo-Exponencial:** Definida pro su valor medio **m** y el valor **k>1**.

$$P(x) = \frac{1}{1 + k(x-m)^2}$$

- Cuanto mayor es el valor de **k**, el crecimiento es más rápido aún y la "campana" es más estrecha.



9. Función Trapecio Extendido: Definida por los cuatro valores de un trapecio **[a,b,c,d]**, y una lista de puntos entre **a** y **b** y/o entre **c** y **d**, con su valor de pertenencia asociado a cada uno de esos puntos (e_i,he_i).



Observaciones:

- En general, la función **Trapezoidal** se adapta bastante bien a la definición de cualquier concepto, con la ventaja de su fácil definición, representación y simplicidad de cálculos.
- En casos particulares, el **Trapecio Extendido** puede ser de gran utilidad. Éste permite gran expresividad aumentando su complejidad.
- En general, usar **una función más compleja no añade mayor precisión**, pues debemos recordar que se está definiendo un concepto **difuso**.

En control difuso, se busca expresar las nociones de "incremento", "decremento" y "aproximación" y para ello se utilizan los tipos de funciones de pertenencia comentados anteriormente. Las funciones de pertenencia Γ, S se usarían para representar etiquetas lingüísticas como "alto", "caliente'" en el dominio de la altura y la temperatura. Etiquetas lingüísticas como "pequeño" y "frío" se expresarían a través de la función L. Por otro lado la noción de aproximación a veces resulta difícil de expresar con una palabra, en el dominio de la temperatura debería ser "confortable"; lo cual se expresaría a través de las funciones triángulo, trapecio, gaussiana,...

1.2.1.2 Determinación de la Función de Pertenencia

Las funciones de pertenencia pueden calcularse de diversas formas. El método a elegir dependerá de la aplicación en particular, del modo en que se manifieste la incertidumbre y en el que ésta sea medida durante los experimentos, a continuación y según [Pedrycz98] se resumen algunos métodos. Hay que recalcar que el sistema puede funcionar mal si las funciones están mal calculadas.

1. **Método Horizontal:**

- Se basa en las respuestas de un grupo de **N** "expertos".
- La pregunta tiene el formato: "¿Puede x ser considerado compatible con el concepto A?".
- Sólo se acepta un "SÍ" o un "NO", de forma que:

A(x)=(Respuestas Afirmativas)/N.

2. **Método Vertical:**

- Se escogen varios valores para α, para construir sus α-cortes.
- Ahora la pregunta es la siguiente, efectuado esos valores de α predeterminados: "¿Identifique los elementos de X que pertenecen a A con grado no menor que α?".
- A partir de esos α-cortes se identifica el conjunto difuso A (usando el llamado Principio de Identidad o Teorema de Representación que se verá más adelante).

3. **Método de Comparación de Parejas [Saaty80]:**

- Suponemos que tenemos ya el conjunto difuso **A**, sobre el Universo **X** de **n** valores $(\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_n})$.
- Se calcula la **Matriz Recíproca** $\mathbf{M=[a_{hi}]}$, matriz cuadrada **n x n** :

$$M = \begin{bmatrix} \frac{A(x_1)}{A(x_1)} & \frac{A(x_1)}{A(x_2)} & \cdots & \frac{A(x_1)}{A(x_n)} \\ \frac{A(x_2)}{A(x_1)} & \frac{A(x_2)}{A(x_2)} & \cdots & \frac{A(x_2)}{A(x_n)} \\ \cdots & \cdots & \frac{A(x_i)}{A(x_j)} & \cdots \\ \frac{A(x_n)}{A(x_1)} & \frac{A(x_n)}{A(x_2)} & \cdots & \frac{A(x_n)}{A(x_n)} \end{bmatrix}$$

  - ✓ La diagonal principal es siempre 1.
  - ✓ Propiedad de Reciprocidad:

    $\mathbf{(a_{hi}, a_{ih})=1}$
  - ✓ Propiedad Transitiva:

    $\mathbf{(a_{hi}, a_{ik})=a_{hk}}$

- El proceso es el inverso:
  - ✓ Se calcula la matriz **M**.

- ✓ Se calcula **A** a partir de **M**.

- ❑ Para calcular **M**, se cuantifica numéricamente el nivel de prioridad o mayor pertenencia de una pareja de valores: $\mathbf{x_i}$ con respecto a $\mathbf{x_j}$.
  - ✓ El número de comparaciones: **n(n-1)/2**
  - ✓ La transitividad es difícil de conseguir (el autovalor de la matriz sirve para medir la consistencia de los datos, de forma que si es muy bajo, deberían repertirse los experimentos).

4. Método basado en la Especificación del Problema:

- ❑ Requieren una función numérica que quiera ser aproximada.
- ❑ El error se define como un conjunto difuso: Mide la calidad de la aproximación.

5. Método basado en la Optimización de Parámetros:

- ❑ La forma de un conjunto difuso A, depende de unos parámetros, denotados por el vector **p**: Representándolo por **A(x; p).**
- ❑ Se obtiene algunos resultados experimentales, en la forma de parejas (elemento, grado de pertenencia): $(\mathbf{E_k}, \mathbf{G_k})$ con **k=1,2, ..., N.**
- ❑ El problema consiste en optimizar el vector **p**, por ejemplo minimizando el error cuadrático: $\min_p \sum_{k=1}^{N} \left[G_K - A(E_K; p)\right]^2$

6. Método basado en la Agrupación Difusa:

- ❑ Se trata de agrupar los objetos del Universo en grupos (solapados) cuyos niveles de pertenencia a cada grupo son vistos como grados difusos.
- ❑ Existen varios algoritmos de *Fuzzy Clustering*, pero el más aceptado es el algoritmo de *"fuzzy isodata"* [Bezdek81].

<u>Algoritmo "Fuzzy Isodata"</u>

- ▪ Supongamos **N** elementos $(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n})$, entre los que existe una medida de **distancia** entre cada dos elementos: $\|\, \mathbf{x_i} - \mathbf{x_j} \,\|$.
- ▪ Crear una matriz $\mathbf{F} = [\mathbf{f_{ij}}]$, de **c** filas y **N** columnas, donde $\mathbf{f_{ij}} \in [0,1]$, denota el grado de pertenencia de $\mathbf{x_j}$ al grupo i-ésimo y se **cumple** que:

$$\forall j = 1,2,\dots,N : \sum_{i=1}^{c} f_{ij} = 1, \text{ y que } \forall i = 1,2,\dots,c : \sum_{j=1}^{N} f_{ij} \in (0,N).$$

- Fila **i**: Grados de pertenencia de los **N** elementos al grupo **i**-ésimo.
- **Algoritmo:**

  - **1. K:=0;** Hallar una matriz inicial **F(0)**.
  - **2.** Usando **F(k)**, calcular los centroides $vi(k) = \frac{\sum_{j=1}^{N} f^2_{ij}(k) x_j}{\sum_{j=1}^{N} f^2_{ij}(k)}$
  - **3.** Calcular **F(k+1)**:

$$(f_{ij}(k+1))^{-1} = \sum_{h=1}^{c} \left(\frac{|| x_j - v_i ||}{|| x_j - v_h ||} \right)^2$$

  - **4.** Comparar **F(k)** con **F(k+1)**: Si son suficientemente parecidos, **PARAR**. en otro caso, **k:=k+1**; Ir al paso **2**.

- Obtenemos soluciones locales a la siguiente optimización no lineal, **cumpliendo** la matriz **[f_{ij}]** las condiciones anteriores:

$$\min_{v_i f_{ij}} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{c} f_{ij}^{\;2} \; || x_j - v_i ||^2$$

1.2.1.3 Conceptos sobre Conjuntos Difusos

Sobre conjuntos difusos se definen una serie de conceptos que nos permiten tratar y comparar conjuntos difusos:

- **Igualdad *(Equality)*** de conjuntos difusos sobre un mismo universo de discurso:

Definición 1.2 *Dos conjuntos difusos A y B sobre Ω se dicen iguales si cumplen:*

$$A = B \Leftrightarrow \forall x \in \Omega, \; \mu A(x) = \mu B(x) \tag{1.4}$$

←

- **Inclusión *(Inclusion)*** de un conjunto difuso en otro:

Definición 1.3 *Dados dos conjuntos difusos A y B sobre Ω, decimos que A está incluido en B si cumplen:*

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in \Omega,\ \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \tag{1.5}$$

←

- **Soporte (Support)** de un conjunto difuso:

Definición 1.4 *El soporte (support) de un conjunto difuso A definido sobre Ω es un subconjunto de dicho universo que satisface:*

$$supp(A) = \{x \in \Omega,\ \mu_A(x) > 0\} \tag{1.6}$$

←

- **α-corte** de un conjunto difuso:

Definición 1.5 *Denotándolo por* A_α*, es un subconjunto no difuso (clásico) de elementos de Ω, cuya función de pertenencia toma un valor mayor o igual que algún valor concreto α de dicho universo de discurso que satisface:*

$$A_\alpha = \{x : x \in \Omega,\ \mu_A(x) \geq \alpha,\ \alpha \in [0,1]\} \tag{1.7}$$

←

El Teorema de Representación descrito a continuación permite representar cualquier conjunto difuso A mediante la unión de sus α-cortes. La siguiente figura ilustra el concepto de α-corte:

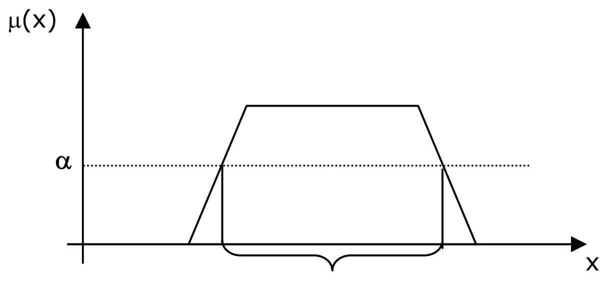


Figura 1.2: α-corte en un Trapecio.

- **Teorema de Representación:**

Definición 1.6 *Todo subconjunto difuso A puede ser obtenido a partir de la unión de sus α-cortes:*

$$A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} A_\alpha \tag{1.8}$$

←

- **Conjunto Difuso Convexo o Cóncavo:**

Definición 1.7 *Haciendo uso del Teorema de Representación se establece el concepto de conjunto difuso como aquel en que todos sus α-cortes son convexos:*

$$\forall x, y \in \Omega, \forall \lambda \in [0,1] : \mu_A(\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y) \geq \min(\mu_A(x), \mu_A(y)) \tag{1.9}$$

←

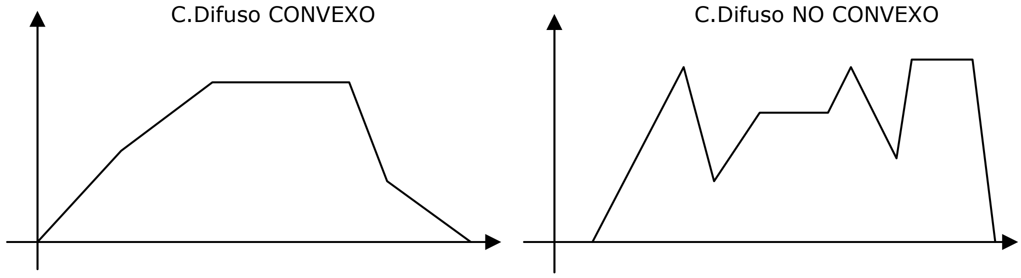


Figura 1.3: Ejemplos de Conjuntos Difusos CONVEXOS y NO CONVEXOS.

Por último, indicar que si dos conjuntos difusos son convexos, también lo es su intersección.

- **Núcleo *(Core)*:**

Definición 1.8 *El núcleo de un conjunto difuso A, definido sobre Ω es un subconjunto de dicho universo que satisface:*

$$\mathrm{Kern}(A) = \{x \in \Omega, \ \mu_A(x) = 1\}$$

(1.10)

←

- **Altura *(Height)*:**

Definición 1.9 *La altura de un conjunto difuso A, definido sobre Ω se define como:*

$$Hgt(A) = \sup_{x \in \Omega} \mu_A(x)$$

(1.11)

←

- Conjunto difuso **Normalizado:**

Definición 1.10 *Un Conjunto Difuso es normalizado sí y sólo sí:*

$$\exists x \in \Omega, \mu_A(x) = Hgt(A) = 1$$

(1.12)

←

1.2.1.4 Operaciones sobre Conjuntos Difusos

El hecho de que la teoría de conjuntos difusos generalice la teoría de conjuntos clásica, da lugar a que los conjuntos difusos admitan las operaciones de unión, intersección y complemento. En [Petry96] podemos encontrar estas y otras operaciones, como la *concentración* (elevar al cuadrado la función de pertenencia), la *dilatación* (efectuar la raíz cuadrada de la función de pertenencia) y la *intensificación* que pueden utilizarse cuando se usan modificadores lingüísticos (linguistic hedges) como "muy" o "poco".

1.2.1.4.1 Unión e Intersección

Definición 1.11 *Si A y B son dos conjuntos difusos sobre un universo de discurso Ω, la función de pertenencia de la unión de ambos conjuntos,* $A \cup B$*, viene dada por*

$$\mu_{A \cup B}(x) = f(\mu_A(x), \mu_B(x)), x \in \Omega$$

(1.13)

donde f es una T-conorma [Sklar83].

←

Definición 1.12 *Si A y B son dos conjuntos difusos sobre un universo de discurso Ω, la función de pertenencia de la intersección de ambos conjuntos,* $A \cap B$ *,viene dada por*

$$\mu_{A \cap B}(x) = g(\mu_A(x), \mu_B(x)), x \in \Omega \tag{1.14}$$

donde g es una t-norma [Sklar83].

←

Tanto las s-normas como t-normas establecen **modelos genéricos** para las operaciones de **unión e intersección** respectivamente, las cuales deben cumplir ciertas propiedades básicas (conmutativa, asociativa, monotonicidad y condiciones frontera).

Definiciones 1.13 *Norma Triangular, t-norma: Operación binaria t: $[0,1]^2 \to [0,1]$ que cumple las siguientes propiedades:*

$$\begin{gathered} \textit{Conmutativa: } x\ t\ y = y\ t\ x \\ \textit{Asociativa: } x\ t\ (y\ t\ z) = (x\ t\ y)\ t\ z \\ \textit{Monotonicidad: Si } x \le y, \text{ y } w \le z \text{ entonces } x\ t\ w \le y\ t\ z \\ \textit{Condiciones Frontera: } x\ t\ 0 = 0,\ x\ t\ 1 = x \end{gathered} \tag{1.15}$$

←

Definición 1.14 *Conorma Triangular, t-conorma o s-norma: Operación binaria s: $[0,1]^2 \to [0,1]$ que cumple las siguientes propiedades:*

$$\begin{gathered} \textit{Conmutativa: } x\ s\ y = y\ s\ x \\ \textit{Asociativa: } x\ s\ (y\ s\ z) = (x\ s\ y)\ s\ z \\ \textit{Monotonicidad: Si } x \le y, \text{ y } w \le z \text{ entonces } x\ s\ w \le y\ s\ z \\ \textit{Condiciones Frontera: } x\ s\ 0 = x,\ x\ s\ 1 = 1 \end{gathered} \tag{1.16}$$

←

t-norma del Mínimo: La función mín (∧) es una t-norma, que corresponde a la operación de **intersección** en conjuntos clásicos cuyos grados de pertenencia están en {0,1}. Por eso, esta función es la extensión natural de la intersección en conjuntos difusos.

t-conorma o s-norma del Máximo: La función máx ($\vee$) es una s-norma, que corresponde a la operación de **unión** en conjuntos clásicos cuyos grados de pertenencia están en {0,1}. Por eso, esta función es la extensión natural de la unión en conjuntos difusos.

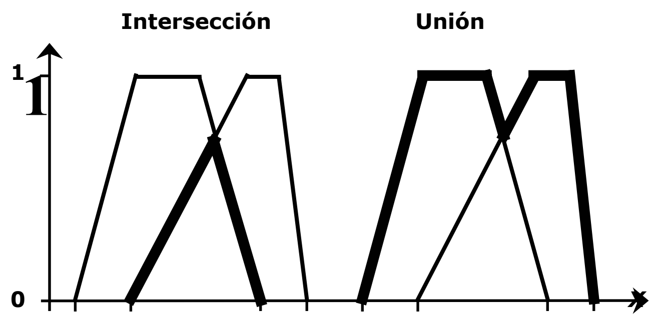


Figura 1.4: Intersección (Mínimo) y Unión (Máximo).

Existe un amplio conjunto de operadores, denominados **t-normas (normas triangulares)** y **t-conormas (co-normas tringulares)**, que pueden ser utilizados como conectivos para modelar la intersección y la unión respectivamente, como los presentadas en [Dubois80, Yager80, Predycz98]. Los más importantes son:

- Operadores *Idempotentes:* El **Máximo** y el **Mínimo** para la unión y la intersección respectivamente. Satisfacen, además de la *idempotencia*, la propiedad distributiva aplicada sobre ambos y son estrictamente crecientes. Estos operadores son los más utilizados por que conservan gran cantidad de las propiedades de los operadores booleanos. En [Benz76] puede encontrarse una justificación a la elección de los operadores **Max** y **Min** para definir los anteriores conceptos.

- Operadores *Arquimedianos:* Emplean la **Suma Probabilística**, (x+y-x*y), y el **producto**, (x*y), para la unión y la intersección, respectivamente. Estos operadores no satisfacen la propiedad distributiva ni son idempotentes.

- Operadores *Acotados (Bounded):* Los operadores dados por, min(1,x+y) y max(0,x+y-1), representan la unión y la intersección respectivamente. Estos operadores no satisfacen la idempotencia, la propiedad distributiva ni la propiedad de absorción. Por el contrario, satisfacen las propiedades conmutativa, asociativa y de identidad.

A continuación se indican las t-normas y s-normas más representativas y utilizadas por la bibliografía anteriormente comentada:

Normas Triangulares o t-normas	**Expresión**
Mínimo	$f(x,y) = \mathrm{Min}(x,y)$
Producto (Algebraico)	$f(x,y) = x \bullet y$
Producto Drástico	$f(x,y) = \begin{cases} x, & \text{si } y = 1 \\ y, & \text{si } x = 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$
Producto Acotado	$f(x,y) = \mathrm{Max}[0,(1+p)(x+y-1)-pxy]$, donde $p \geq -1$
Producto de Hamacher	$f(x,y) = \dfrac{xy}{p+(1-p)(x+y-xy)}$, donde $p \geq 0$
Familia Yager	$f(x,y) = 1 - \mathrm{Min}(1, [(1-x)^p + (1-y)^p]^{1/p})$, donde $p > 0$
Familia Dubois –Prade	$f(x,y) = \dfrac{xy}{\mathrm{Max}(x,y,p)}$, donde $0 \leq p \leq 1$
Familia Frank	$f(x,y) = \log_p\left(1 + \dfrac{(p^x-1)(p^y-1)}{p-1}\right)$, donde $p > 0;\ p \neq 1$
Producto de Einstein	$f(x,y) = \dfrac{xy}{1+(1-x)+(1-y)}$
Otras	$f(x,y) = \dfrac{1}{1+[((1-x)/x)^p + ((1-y)/y)^p]^{1/p}}$, donde $p > 0$ $f(x,y) = \dfrac{1}{[1/x^p + 1/y^p - 1]}$ $f(x,y) = [\mathrm{Max}(0, x^p + y^p - 1)]^{1/p}$

Tabla 1.1: Tipos de t-normas.

Conormas Triangulares, T-Conormas o s-normas	**Expresión**
Máximo	$f(x, y) = Max(x, y)$
Suma – Producto	$f(x, y) = x + y - xy$
Suma Drástica	$f(x,y) = \begin{cases} x, & \text{si } y = 0 \\ y, & \text{si } x = 0 \\ 1, & \text{en otro caso} \end{cases}$
Suma Acotada	$f(x,y) = Min(1, x + y + pxy)$, donde $p \geq 0$
Familia Sugeno	$f(x,y) = Min(1, x + y + p - xy)$, donde $p \geq 0$
Familia Yager	$f(x,y) = Min(1, \left[x^p + y^p\right]^{1/p})$, donde $p > 0$
Familia Dubois - Prade	$f(x, y) = \dfrac{(1-x)(1-y)}{Max(1-x,\ 1-y,\ p)}$, donde $p \in [0, 1]$
Familia Frank	$f(x,y) = \log_p\left(1 + \dfrac{(p^{1-x} - 1)(p^{1-y} - 1)}{p-1}\right)$ donde $p > 0;\ p \neq 1$
Otras	$f(x, y) = \dfrac{x + y - xy - (1-p)xy}{1 - (1-p)xy}$, donde $p \geq 0$ $f(x, y) = 1 - Max(0, \left[(1-x)^p + (1-y)^p - 1\right]^{1/p})$, donde $p > 0$ $f(x, y) = \dfrac{1}{1 - \left[x/(1-x)^p + y/(1-y)^p\right]^{1/p}}$, donde $p > 0$ $f(x, y) = \dfrac{1}{1 - \left[1/(1-x)^p + 1/(1-y)^p - 1\right]^{1/p}}$, donde $p > 0$

Tabla 1.2: Tipos de s-normas.

Definición 1.15 *Existe una relación entre t-normas (T) y T-Conormas (S) que no es otra que una extensión de la Ley de Morgan:*

$$x \text{ S } y = (1 - x) \text{ T } (1 - y) \tag{1.17}$$

←

Cuando una t-norma y una T-Conoma satisfacen esta propiedad se dice que son **conjugadas** o **duales**.

Las t-normas y t-conormas no pueden ordenarse de mayor a menor. Sin embargo, es fácil identificar la mayor y la menor t-norma y t-conorma:

- Mayor t-norma → Función Mínimo.
- Menor t-norma → Producto Drástico.
- Mayor t-conorma → Suma Drástica.
- Menor t-conorma → Función Máximo.

Del mismo modo que se extiendan los operadores intersección y unión, es posible extender el operador complemento.

1.2.1.4.2 Complemento o Negación

La noción de complemento se puede construir a partir del concepto de negación fuerte de [Trillas79]:

Definición 1.16 *Una función C de [0,1] en [0,1] es una* ***negación fuerte*** *si satisface las siguientes condiciones:*

A. C(0)=1

B. C(C(a))=a (involución)

C. C es estrictamente decreciente

D. C es continua

←

Aunque existen varios tipos de operadores que satisfacen tales propiedades o versiones relajadas de las mismas, nosotros, para el complemento, emplearemos principalmente la versión proporcionada por Zadeh en [Zadeh65A], en el cual:

$$C(x) = 1 - x \tag{1.18}$$

Por tanto, para un conjunto difuso A sobre un universo de discurso Ω, la función de pertenencia del **complemento** de A, $\neg A$, viene dada por:

$$\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x),\, x \in \Omega \tag{1.19}$$

1.2.1.4.3 Comparación

Los conjuntos difusos, definidos a través de una función de pertenencia, pueden ser *comparados* de diferentes formas. A continuación se enumeran varios *métodos para la comparación de conjuntos difusos* utilizados hoy día según [Predycz98].

A) MEDIDA DE DISTANCIAS (*DISTANCE MEASURES*)

Medida de Distancias considera una función de distancia entre las funciones de pertenencia de dos conjuntos de forma que trate de indicar la proximidad entre ambos. Es importante enfatizar la faceta funcional de los conjuntos difusos a través de este método y no tanto la perspectiva teórica de los conjuntos difusos. En general, la distancia entre *A* y *B*, definida en el mismo universo de discurso, puede ser definida usando la *Distancia Minkowski*.

$$d(A,B) = \left[\int_X |A(x) - B(x)|^p \, dx \right]^{1/p} \tag{1.20}$$

donde p $\geq$ 1; se asume que la integral existe. Varios casos específicos son típicamente usados:

1. Distancia Hamming (p = 1): $d(A,B) = \int_X |A(x) - B(x)| \, dx$

$$\tag{1.21}$$

2. Distancia Euclídea (p=2): $d(A,B) = \left[\int_X |A(x) - B(x)|^2 \, dx \right]^{1/2}$

(1.22)

Para universo de discurso discretos, la integración es reemplazada por la sumatoria. Lo más similar a los dos conjuntos difusos, la función de menor distancia entre ambos. Por esta razón, es conveniente normalizar la función de distancia y denotarla $d_n(A,B)$ y usar esta forma para expresar la similitud como una complementación directa, 1 - $d_n(A,B)$.

B) ÍNDICES DE IGUALDAD (*EQUALITY INDEXES*)

Se basa en la expresión lógica de la igualdad, es decir, dos conjuntos *A* y *B* son iguales si $A \subset B$ y $B \subset A$. En conjuntos difusos la igualdad puede cumplirse con cierto grado. Con ello se define la siguiente expresión:

$$(A \equiv B)(x) = \frac{[A(x)\varphi B(x)] \wedge [B(x)\varphi A(x)] + [\overline{A}(x)\varphi \overline{B}(x)] \wedge [\overline{B}(x)\varphi \overline{A}(x)]}{2}$$

(1.23)

donde la conjunción ($\wedge$) se modela por la norma triangular del mínimo y la inclusión es representada por el operador φ (phi), inducida por un t-norma continua tal que:

$$A(x)\varphi B(x) = \sup_{c \in [0,1]} [A(x) \, t \, c \le B(x)]$$

(1.24)

Tomando como ejemplo el *Producto Acotado con p=0.*

$$A(x)\varphi B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } A(x) < B(x) \\ B(x) - A(x) + 1 & \text{si } A(x) \ge B(x) \end{cases} \Rightarrow A \equiv B\,(x) = \begin{cases} A(x) - B(x) + 1 & \text{si } A(x) < B(x) \\ B(x) - A(x) + 1 & \text{si } A(x) \ge B(x) \end{cases}$$

(1.25)

Para obtener un único valor $\forall x \in X$ hay 3 métodos básicos:

- Índice de Igualdad **Optimista**: $(A \equiv B)_{opt} = \sup_{x \in X}(A \equiv B)(x)$

(1.26)

- Índice de Igualdad **Pesimista**: $(A \equiv B)_{pes} = \inf_{x \in X}(A \equiv B)(x)$

(1.27)

- Índice de Igualdad **Medio**: $(A \equiv B)_{avg} = \left(1/\mathrm{Card}(x) \right) \int_x (A \equiv B)(x)dx$

(1.28)

Se cumple que:

$$(A \equiv B)_{pes} \leq (A \equiv B)_{avg} \leq (A \equiv B)_{opt}$$

(1.29)

C) MEDIDAS DE POSIBILIDAD Y NECESIDAD (*POSSIBILITY AND NECESSITY MEASURES)*

Utiliza los conjuntos difusos como *distribuciones de posibilidad* donde A(x) mide la *posibilidad* de que el dato buscado sea X [Zadeh78], es decir la *posibilidad* de que el valor A sea igual al valor *B.* Mide en que medida A y B se superponen y se denota como Poss(A, B) y definida por:

$$\mathrm{Poss}\ (A, B) = \sup_{x \in X} \left[\min \left(A(x), B(x) \right) \right]$$

(1.30)

La medida de *necesidad* de A con respecto a B se denota por Nec(A,B), y es definida como:

$$\mathrm{Nec}\ (A, B) = \inf_{x \in X} \left[\max \left(A(x), 1 - B(x) \right) \right]$$

(1.31)

Como se ha comentado ya anteriormente la medida de posibilidad cuantifica en que medida A está superpuesto en B. En virtud de las definiciones anteriormente introducidas y la propiedad de simetría en la medida se afirma que:

$$\mathrm{Poss}\ (A, B) = \mathrm{Poss}\ (B, A)$$

(1.32)

En cambio la medida de necesidad es asimétrica, $\text{Nec}\ (A, B) \neq \text{Nec}\ (B, A)$. Sin embargo se cumple la siguiente relación:

$$\text{Nec}\ (A, B) + \text{Poss}\ (\overline{A}, B) = 1 \tag{1.33}$$

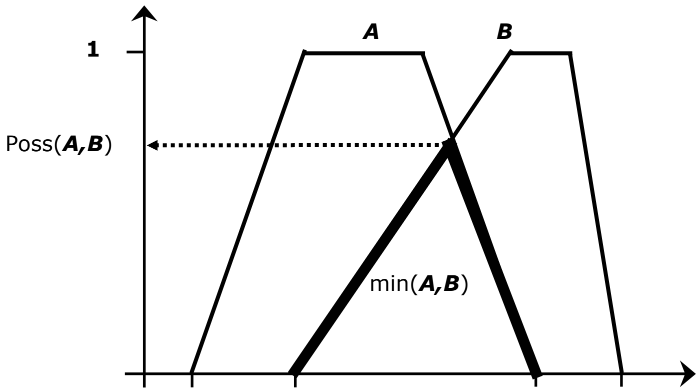


Figura 1.5: Ilustración general del concepto de *Poss(A,B)* a través de la t-norma del mínimo.

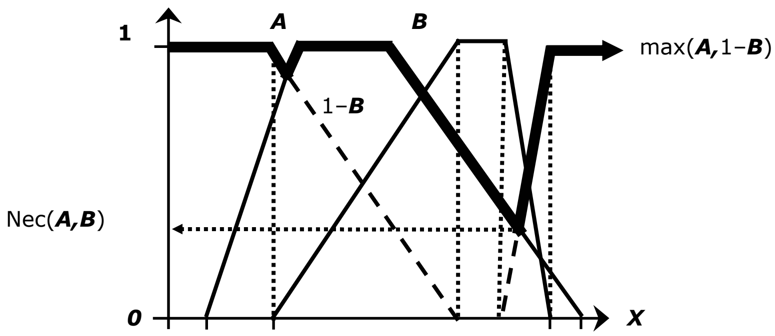


Figura 1.6: Ilustración general del concepto de *Nec(A,B)* a través de la t-conorma del máximo.

Considérese el siguiente Ejemplo 1.2 para ilustrar el concepto de posibilidad y necesidad de forma más representativa:

Ejemplo 1.2: Una autopista donde el límite de velocidades de 100 km/h. En este específico contexto, el concepto de *elevada velocidad* podría ser representado por un conjunto difuso B definido en el espacio de las velocidades, como se muestra en la Figura 1.7. La función de pertenencia para un vehículo desplazándose a una velocidad *alrededor 80 km/h* es de tipo triangular, conjunto difuso A. Bajo este escenario varias cuestiones se nos plantean: ¿En qué medida está el vehículo viajando a una elevada velocidad?, ¿qué grado de *elevada velocidad* es *"alrededor 80 km/h"*?. Basándose en la interpretación del concepto de medida de posibilidad podríamos cuantificar en que medida A está superpuesto en B, es decir, en que medida la velocidad a la que se desplaza el vehículo (*alrededor 80 km/h)* es *elevada*, y así:

Poss (*alrededor 80 km/h, elevada velocidad*) = Poss (A, B) = Poss (B, A) = 0.6

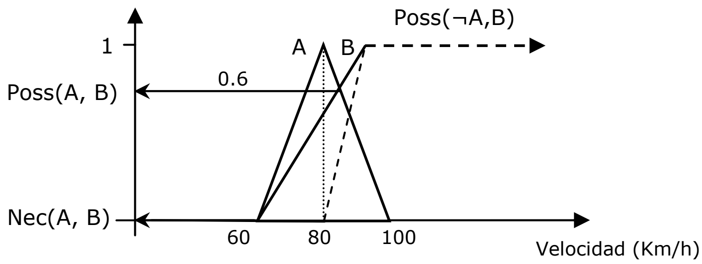


Figura 1.7: Ilustración del ejemplo 1.2.

La *generalización* de las medidas de *Posibilidad* y *Necesidad*, usan t-normas o t-conormas triangulares en lugar de las funciones min y max respectivamente.

Otras equivalencias son:

$$\text{Poss}\ (A \cup B, C) = \text{Max}\left\{ \text{Poss}\,(A, C), \text{Poss}\,(B, C) \right\} \tag{1.34}$$

$$\text{Poss}\ (A \cap B, C) = \text{Min}\left\{ \text{Nec}\,(A, C), \text{Nec}\,(B, C) \right\} \tag{1.35}$$

Si se extiende el concepto de *posibilidad* sobre el universo de discurso se podría afirmar que la posibilidad de un conjunto difuso *A*(*x*) (o de una distribución de posibilidad) en el universo X según la notación como:

$$\Pi\,(A) = \text{Poss}\,(A, X) = \sup_{x \in X} \left[\, \min\left(A(x),1\right)\,\right] = \sup_{x \in X}\; A(x)$$

(1.36)

Dicha posibilidad mediría si determinado evento (conjunto difuso A) es no posible sobre el universo X.

No mediría la incertidumbre, ya que si $\Pi\,(A) = 1$ sabemos que el evento ***A*** es totalmente *posible*, pero si:

$\Pi\,(\overline{A}) = 1$, entonces la incertidumbre es indeterminada.

$\Pi\,(\overline{A}) = 0$, entonces la ocurrencia de ***A*** es cierta.

Π es una función que opera sobre los conjuntos difusos del universo X, F(X), asociándoles un valor del intervalo unidad**:** $\Pi : F\,(X) \rightarrow [0,1]$;

- *A*(x) es un concepto evento difuso en X.
- $\Pi\,(A)$ mide el grado con el que A es posible.

$\Pi\,(X) = 1$ Posibilidad de que ocurra un elemento del universo.

$\Pi\,(\phi) = 1$ Posibilidad de que NO ocurra un elemento del universo.

Equivalencias entre *posibilidad* y *necesidad*:

$$N(A) = \inf_{x \in X} \{A(x)\} = 1 - \sup_{x \in X} \{1 - A(x)\} = 1 - \Pi(\neg A):\; N(A) = 1 - \Pi\,(\neg A)$$

(1.37)

$$\Pi\,(A) = \sup_{x \in X} \{A(x)\} = 1 - \inf_{x \in X} \{1 - A(x)\} = 1 - N(\neg A):\; \Pi\,(A) = 1 - N(\neg A)$$

(1.38)

Estas equivalencias explican porqué la *necesidad* complementa la información sobre la certeza de un evento A.

- A mayor N(A), menor posibilidad del evento contrario (¬A).
- A mayor Π(A), menor necesidad del evento contrario (¬A).
- N(A) = 1 $\Leftrightarrow$ ¬A es imposible, forzosamente: Π (¬A) = 0.
    - Si un evento es totalmente necesario, entonces el evento contrario es totalmente imposible.

- Π(A) = 1 $\Leftrightarrow$ ¬*A* no es necesario, en absoluto: *N*(¬*A*) = 0.

- Si un evento es totalmente posible, entonces el evento contrario no puede ser necesario en ninguna medida.

- $N(A) = 1 \;\Rightarrow\; \Pi(A) = 1$ (a la inversa no se cumple).
  - Un evento totalmente necesario, debe ser totalmente posible.

- $A \subseteq B \Rightarrow\; N(A) \;\leq\; N(B)$; y $\Pi(A) \;\leq\; \Pi\,(B)$;

D) MEDIDAS DE COMPATIBILIDAD (*COMPATIBILITY MEASURES*)

Mide en que medida cierto conjunto difuso es compatible con otro (definido en el mismo espacio).

El resultado no es un único número, sino un conjunto difuso definido en el intervalo unidad**,** [0,1] - *Conjunto Difuso de Compatibilidad* -.

$$\text{Comp}\;(\text{B, A})\,(\text{u}) = \text{Sup}_{\text{u}=\text{A(x)}}\{\text{B(x)}\},\;\; \text{u} \in [0{,}1] \tag{1.39}$$

Puede verse al conjunto *B* como un *"valor difuso"* y al conjunto *A* como un *"concepto difuso"*: Entonces Comp(*B*, *A*) mide la Compatibilidad con la que <u>*B* es *A*</u>.

Ejemplo 1.3: *B* es el *valor* "aprox. 70 años" y *A* es el *concepto* "muy viejo" (figuras 1.8 y 1.9):

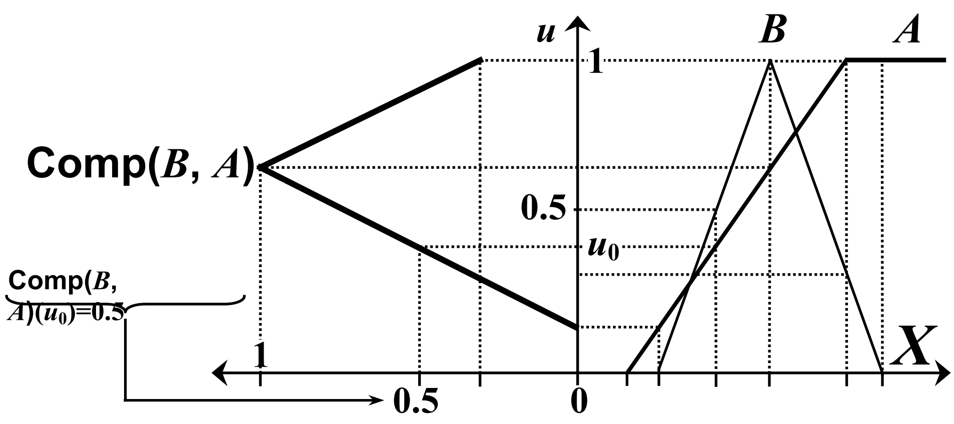


Figura 1.8: Ilustración del ejemplo 1.3, Comp(B, A).

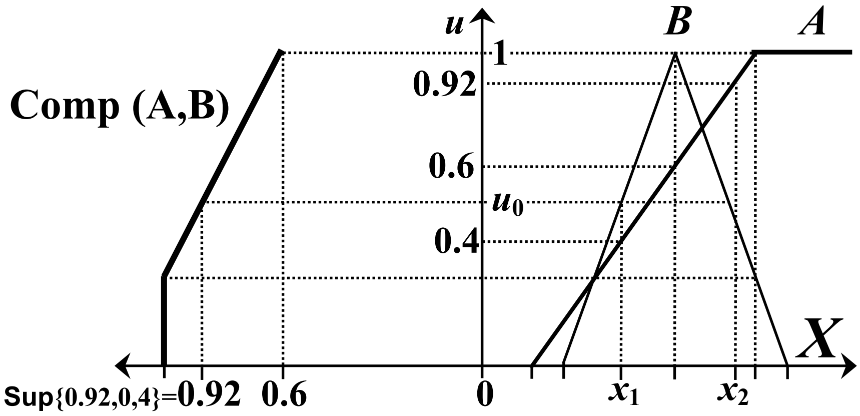


Figura 1.9: Ilustración del ejemplo 1.3, Comp(A, B).

Propiedades de la Medida de Compatibilidad:

- Mide el grado con el que *B* puede cumplir el concepto *A*.
  - Ese grado será mayor cuanto más se aproxime el conjunto difuso Comp(*B*, *A*) al valor *singleton* "1" (compatibilidad máxima).

- Suponiendo que *B* y *A* sean conjuntos difusos normalizados: $\forall A$, Comp(*A*, *A*)(*u*) = *u*: Función de pertenencia lineal.
  - Si *A* no está normalizado, la función será la misma entre 0 y la altura del conjunto *A*: Si *u* > Altura(*A*), Comp(*A*, *A*)(*u*) = indeterminado (0).

- Si *B* es un número *x* (conj. difuso tipo "singleton"), el resultado será también otro "singleton" en el valor *A*(*x*):

$$\text{Comp}(B, A)(u) = \begin{cases} 1, & \text{si } u = A(x) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

  - Si *B* no está normalizado, el resultado tampoco lo estará, siendo su altura la misma que la del conjunto *B*.

- Soporte(*A*) $\cap$ Soporte(*B*) = ϕ :

$$\text{Comp}(B, A)(u) = \text{Comp}(A, B)(u) = \begin{cases} 1, & \text{si } u = 0 \ \text{(compatibilidad mínima)} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Si *B* no está normalizado, el resultado tampoco lo estará, siendo su altura la misma que la del conjunto *B*, para *u*=0.

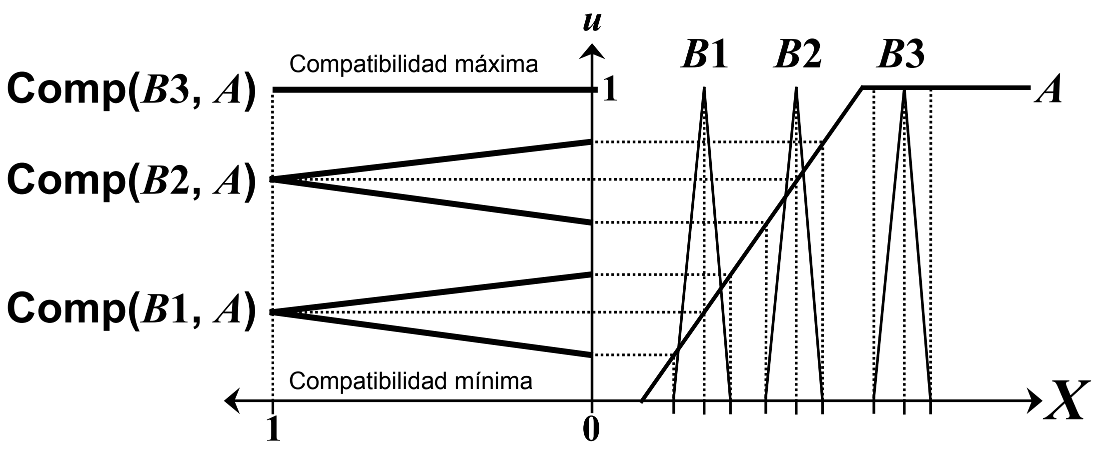


Figura 1.10: 3 Conjuntos con igual forma situados en distintas posiciones comparados respecto *A*.

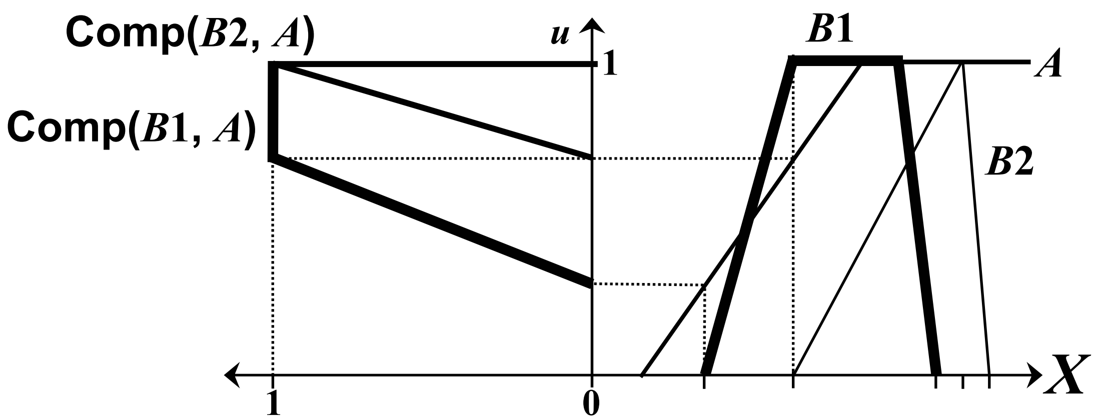


Figura 1.11: 2 Conjuntos con igual altura que *A* en algún punto, pero que su nucleo está o no incluido en el núcleo de *A*.

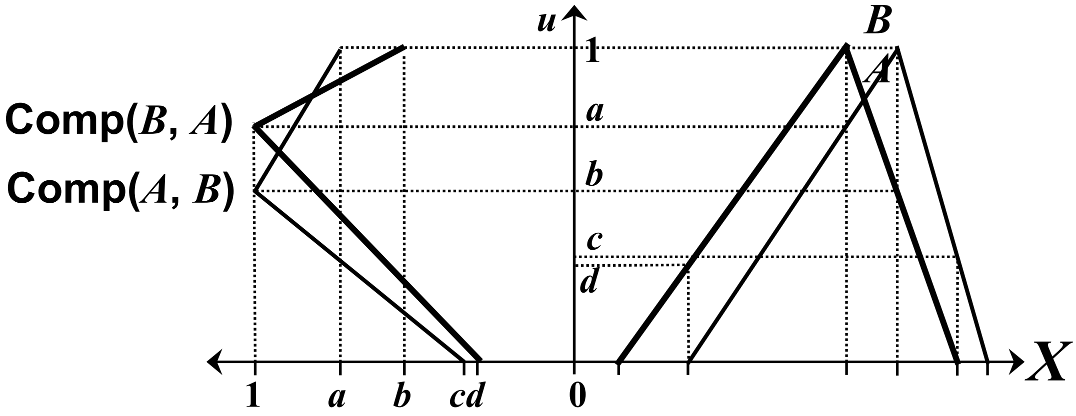


Figura 1.12: 2 Conjuntos triangulares comparados uno respecto del otro.

- La compatibilidad es <u>asimétrica</u>: Comp(*B*, *A*) $\neq$ Comp(*A*, *B*).
- Si $B \subset B'$, entonces Comp(*B*, *A*)(*u*) $\leq$ Comp(*B'*, *A*)(*u*) = *u*.
- $B(x) = \{1, \forall x \in X\} \Rightarrow$ Comp(*B*, *A*)(*u*) = $\{1, \forall u \in [0,1]\}$
- $B(x) = \{0, \forall x \in X\} \Rightarrow$ Comp(*B*, *A*)(*u*) = $\{0, \forall u \in [0,1]\}$
- $B \subset A$ y están normalizados $\Rightarrow$ Comp(*B*,*A*)(0) = 0 y Comp(*B*,*A*)(1) = 1
    - Por supuesto, pueden existir más puntos con compatibilidad 0 y 1.
- $A \subset B$ y están normalizados $\Rightarrow$ Comp(*B*,*A*)(1) = 1 y Comp(*B*,*A*)(*u*) = 0 $\Leftrightarrow$ *u* = 0.
- Las medidas de ***Posibilidad*** y ***Necesidad*** entre *A* y *B* están incluidas en el soporte de Comp(*B*, *A*).
    - Si *B* es un intervalo:

      Poss(*B*, *A*)=Sup{Soporte(Comp(*B*, *A*))}.

      Nec(*B*, *A*) =Inf {Soporte(Comp(*B*, *A*))}.

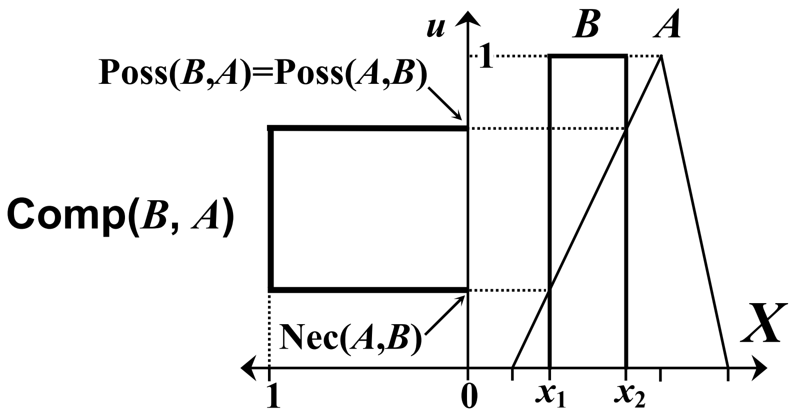


Figura 1.13: Medidas de *Poss* y *Nec* incluidas en el soporte de *Comp.*

1.2.1.5 Relaciones Difusas

Una relación clásica puede ser considerada como un conjunto de tuplas, donde cada tupla es un par ordenado. Al igual que los conjuntos clásicos una relación clásica puede ser descrita por una función característica. Del mismo modo una relación difusa es un **conjunto difuso de tuplas**, en donde esta función característica es extendida al intervalo [0,1].

Definición 1.17 *Sean U y V dos universos no finitos (continuos) y* $\mu_R : UxV \to [0,1]$*, entonces*

$$R = \int_{UxV} \mu_R(u,v)/(u,v) \tag{1.40}$$

←

Es importante enfatizar que una relación abarca funciones pero no en el sentido contrario, es decir, no todas las funciones son relaciones, pero no todas las relaciones son funciones. Una relación es una función de X → Y si y sólo si:

$$\forall_x \in X \ \exists! \ y \in Y \ R(x,y) = 1 \tag{1.41}$$

Obsérvese también que las funciones tienen una dirección de construcción implícita que ha de ser especificada por:

$$f : X \to Y \tag{1.42}$$

Obviamente no hay garantía de que al ser mapeada f se obtenga $f^{-1}:Y \rightarrow X$. En contraste, las relaciones poseen una dirección libre, lo que las convierte en un importante concepto y diferencia computacional. Aunque uno puede fácilmente computar f de cualquier *x*, dada f(x), esto no es implícitamente automático en su determinación para $f^{-1}(y)$. La computación con relaciones es muy distinta a las funciones.

Las relaciones difusas generalizan el concepto genérico de relación al admitir la noción de pertenencia parcial (asociación) entre los puntos en el universo de discurso.

Ejemplo 1.4: Tómese como ejemplo de relación difusa en $\Re^2$ (relación binaria) "*aproximadamente igual*", con la siguiente función de pertenencia definida:

$$1/(1,1) + 1/(2,2) + 1(3,3) + 0.8/(1,2) + 0.8/(2,3) + 0.8/(2,1) + 0.8/(3,2) + 0.3/(1,3) + 0.3/(3,1)$$

$$x \text{ aproximadamente igual a } y: \quad R(x,y) = \begin{Bmatrix} 1, & \text{si } x = y \\ 0.8, & \text{si } |x - y| = 1 \\ 0.3, & \text{si } |x - y| = 2 \end{Bmatrix}$$

Cuando el universo de discurso es finito, una notación matricial puede ser bastante útil para representar la relación. Así el ejemplo anterior quedaría:

	Y		
	1	0.8	0.3
X	0.8	1	0.8
	0.3	0.8	1

1.2.1.5.1 Operaciones con Relaciones Difusas

Las definiciones de operaciones básicas sobre relaciones difusas están estrechamente correspondidas con las operaciones sobre conjuntos difusos (sección 1.2.1.4). Para ilustrarlo la definición es especificada por dos relaciones difusas como argumentos, R, W, P,..., definidas en *X* x *Y.*

Así en el caso de operaciones sobre conjuntos difusos, todos estos son definidos de forma relacional:

- Union: $(R \cup W)(x,y) = R(x,y)\ s\ W(x,y)$
- Intersección: $(R \cap W)(x,y) = R(x,y)\ t\ W(x,y)$
- Complemento: $\neg R(x,y) = 1 - R(x,y)$
- Inclusión: $R \subset W \quad R(x,y) \leq W(x,y)$
- Igualdad: $R = W \quad R(x,y) = W(x,y)$

donde s, t son cualquier t-conorma y t-norma correspondientemente para todo *x* en *X* y *y* en *Y*.

Las relaciones difusas pueden ser compuestas con la adición de diferentes operadores sobre conjuntos. Se asume que R, G y W son relaciones difusas definidas en el producto cartesiano *X* x *Y*, *X* x Z, *Z* x *Y* respectivamente, así:

- **Sup-t Composición:**

$R = G \,\square\, W$

$$R(x,y) = \operatorname*{Sup}_{z \in Z}\left[G(x,z)\ t\ W(z,y)\right] \tag{1.43}$$

El caso de *Sup-Min composición* es un caso particular (t-norma $\Rightarrow$ mínimo) de esta familia.

$$R(x,y) = \operatorname*{Sup}_{z \in Z}\left[G(x,z) \wedge W(z,y)\right] \tag{1.44}$$

- **Inf-s Composición:**

$R = G \ \blacklozenge\ W$

$$R(x,y) = \operatorname*{Inf}_{z \in Z}\left[G(x,z)\ s\ W(z,y)\right] \tag{1.45}$$

El caso de *Inf-Max composición* es un caso particular (t-conorma $\Rightarrow$ máximo) de esta familia.

$$R(x,y) = \operatorname*{Sup}_{z \in Z}\left[G(x,z) \vee W(z,y)\right] \tag{1.46}$$

Las notaciones para *Sup-Min* y *Inf-Max* composiciones comúnmente usadas son representadas por $R = G \circ W$ y $R = G \bullet W$, respectivamente.

A continuación se exponen dos operaciones muy importantes en relaciones difusas, son la **Proyección** y la **Extensión Cilíndrica**. Pero antes de definir formalmente este tipo de operaciones preguntémonos: ¿cuál es su objetivo?. Para responder a esta pregunta diremos que el uso de estas operaciones es el de *afectar el tamaño de la relaciones difusas* sobre las que operan. Tomando como relación difusa *R* definida en X x Y se tiene que:

- **Proyección Cilíndrica:** La proyección de *R* en X es definida como:

$$R_{|X}(x) = \mathrm{Proj}_X\, R(x) = \operatorname*{Sup}_{y \in Y} R(x, y), \qquad x \in X \tag{1.47}$$

Esta operación reduce la dimensión de la relación, así el operador de proyección permite trasladar una relación terciaria a una binaria, una binaria a un conjunto difuso o un conjunto difuso a un valor crisp (puntual).

Análogamente, uno puede definir una proyección de *R* en Y:

$$R_{|Y}(x) = \mathrm{Proj}_Y\, R(y) = \operatorname*{Sup}_{x \in X} R(x, y), \qquad y \in Y \tag{1.48}$$

El operador de proyección puede ser interpretado en el marco de la Sup-t composición, cuando el conjunto difuso *A* en X asume el valor 1 idénticamente sobre todo su espacio, o sea:

$$Y(y) = (A \circ R)(y) = \operatorname*{Sup}_{x \in X}\left[A(x)\ t\ R(x, y)\right] = \operatorname*{Sup}_{x \in X} R(x, y) \tag{1.49}$$

Ejemplo 1.5: Sea R la relación difusa siguiente:

	Y1	Y2	Y3	Y4
X1	0.8	1	0.1	0.7
X2	0	0.8	0	0
X3	0.9	1	0.7	0.8

La proyección de R sobre X posee el siguiente significado: x_i toma el valor máximo del grado de pertenencia de las tuplas (x_i, y_1), (x_i, y_2), (x_i, y_3), (x_i, y_4), es decir, el máximo de la fila i. De este modo, da lugar al conjunto difuso:

$$\text{Proy. de R sobre X} = 1/x_1 + 0.8/x_2 + 1/x_3$$

Procediendo de la misma manera, la proyección de R sobre Y da lugar al conjunto difuso:

$$\text{Proy. de R sobre Y} = 0.9/y_1 + 0.8/y_2 + 0.7/y_3 + 0.8/y_4$$

También es posible obtener la proyección total de R que da lugar al valor 1:

	Y1	Y2	Y3	Y4	Proy. en X
X1	0.8	1	0.1	0.7	0.8
X2	0	0.8	0	0	0.8
X3	0.9	1	0.7	0.8	1
Proy. en Y	0.9	1	0.7	0.8	Proy. Total = 1

- **Extensión Cilíndrica:** El operador de proyección se suele usar siempre en combinación con el de extensión. Este último es más o menos el operador opuesto a la proyección. Extiende conjuntos difusos a relaciones binarias, relaciones binarias a terciarias, etc. Se suele utilizar para un objetivo concreto: No es posible calcular la intersección de un conjunto difuso A definido sobre el universo X y una relación R definida sobre el producto cartesiano X x Y pero sí, si se extiende A a dicho producto cartesiano, ya es posible realizar la operación.

Así la *Extensión Cilíndrica* en X x Y de cualquier *A* en X es una relación difusa, (Cyl. *A*), con la función de pertenencia siguiente:

$$(\text{Cyl. A})(x,y) = A(x), \quad \text{para todo } y \in Y \tag{1.50}$$

Ejemplo 1.6: Considerando de nuevo la relación R que expresaba el grado en que *x* "es aproximadamente igual a" *y* y el conjunto difuso x "es pequeño" expresado por:

$$A = 0.3/x_1 + 1/x_2 + 0.8/x_3$$

La combinación de la relación difusa R y el conjunto difuso *A*, expresada por "*x* es aproximadamente igual a *y* y *x* es pequeño" puede venir dada por la intersección de la relación y la extensión de *A*. La extensión de *A* en X x Y es:

Cyl. (A)	Y1	Y2	Y3	Y4
X1	0.3	0.3	0.3	0.3
X2	1	1	1	1
X3	0.8	0.8	0.8	0.8

Y la intersección de R y Cyl (A) es:

Cyl. (A)	Y1	Y2	Y3	Y4
X1	0.3	0.3	0.1	0.3
X2	0	0.8	0	0
X3	0.8	0.8	0.7	0.8

De esta forma la combinación de conjuntos difusos y relaciones difusas mediante la extensión cilíndrica se denomina **composición**.

1.2.1.6 Números Difusos

El concepto de número difuso fue introducido por primera vez en [Zadeh75] con el propósito de analizar y manipular valores numéricos aproximados, por ejemplo: "próximo a 0", "casi 5", etc. El concepto ha sido refinado sucesivamente y en esta memoria entenderemos por número difuso lo siguiente [Dubois85]:

Definición 1.18 *Sea A un subconjunto difuso de Ω y $\mu_A(x)$ su función de pertenencia cumpliendo:*

1. $\forall x, y \in \Omega, \forall \mu_A(t) \geq \min(\mu_A(x), \mu_A(y))$*, es decir, que es CONVEXO.*
2. $\mu_A(x)$ *es semicontinua superiormente.*
3. *El soporte de A es un conjunto acotado.*

*entonces diremos que A es un **número difuso**.*

←

Algunos autores incluyen en la definición la necesidad de que el subconjunto difuso esté normalizado.

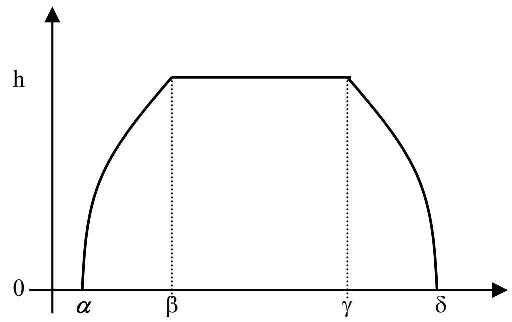


Figura 1.14: Número difuso general.

La forma general de la función de pertenencia de un número difuso A, es la siguiente:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} r_A(x) & \text{si } x \in [\alpha, \beta) \\ h & \text{si } x \in [\beta, \gamma] \\ s_A(x) & \text{si } x \in (\gamma, \delta] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(1.51)

donde r_A, s_A:$\Omega \rightarrow [0,1]$, r_M no decreciente, s_M no creciente y

$$r_A(\beta) = h = s_A(\gamma)$$

(1.52)

con h $\in (0,1]$ y $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \Omega$.

Al número h se le denomina *altura* del número difuso, al intervalo $[\beta,\gamma]$ *intervalo modal* y a los números β-α y δ-γ *holguras izquierda y derecha* respectivamente.

A lo largo de esta memoria utilizaremos a menudo un caso particular de números difusos que se obtiene cuando consideramos a las funciones r_A y s_A como funciones lineales. En este caso la función de pertenencia adopta la forma:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} h + \dfrac{(x-\beta)h}{\beta-\alpha} & \text{si } x \in [\alpha, \beta) \\ h & \text{si } x \in [\beta, \gamma] \\ h - \dfrac{(x-\gamma)h}{\delta-\gamma} & \text{si } x \in (\gamma, \delta] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(1.53)

A un número difuso de este tipo lo llamaremos *triangular o* ***trapezoidal****.* Usualmente trabajaremos con números difusos normalizados por lo que h=1, en este caso podremos caracterizar un número difuso trapezoidal normalizado A, mediante el empleo de los 4 parámetros que son realmente los imprescindibles:

$$A \equiv (\alpha,\beta,\gamma,\delta)$$

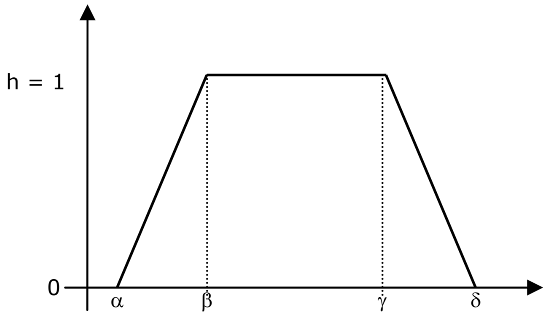


Figura 1.15: Número difuso trapezoidal normalizado.

1.2.1.6.1 El principio de Extensión *(Extension Principle)*

Una de las nociones más importantes en teoría de conjuntos difusos es el *principio de extensión*, propuesto en [Zadeh75]. Proporciona un método general que permite extender conceptos matemáticos no difusos para el tratamiento de cantidades difusas. Se usa para transformar cantidades difusas, que tengan iguales o distintos universos, según una función de transformación en esos universos.

Sea A una cantidad difusa definida sobre el universo de discurso X y f una función de transformación no difusa tal que f: $X \rightarrow Y$. El propósito es extender f en A de forma que opere sobre X y devuelva una cantidad difusa B sobre Y. Dicho objetivo se obtiene por uso de la composición del *Sup-Min* como a continuación se comenta de forma generalizada en el caso del producto cartesiano de *n* universos de discursos.

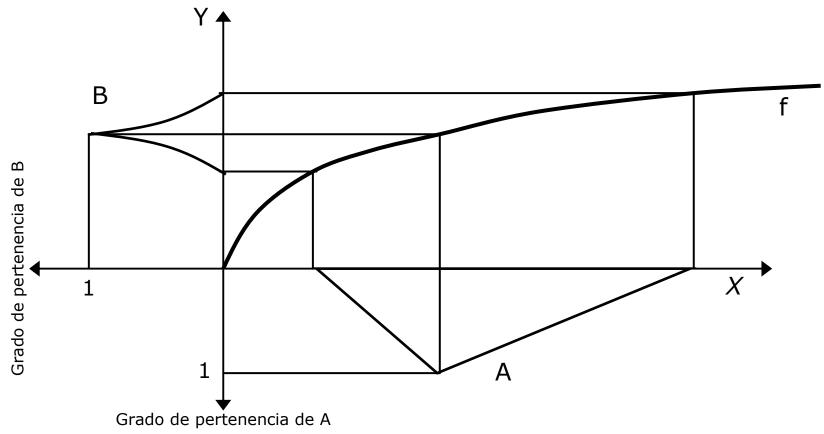


Figura 1.16: Representación gráfica del principio de extensión.

Definición 1.19 *Sea Ω un producto cartesiano de universos tal que $\Omega = \Omega_1$ X Ω_2 X...X Ω_n, y $A_1, A_2,\dots, A_n$, n conjuntos difusos de $\Omega_1, \Omega_2,\dots, \Omega_n$ respectivamente, f una función desde Ω al universo Ω', entonces un conjunto difuso B de Ω' viene definido por:*

$$B = \int_{\Omega'} \mu B(y) / y$$

donde $y = f(A_1, A_2,\dots, A_n)$ $(y \in \Omega')$, *y*

$$\mu B(y) = \sup_{\substack{\Omega 1,\dots,\Omega n \\ f(\Omega 1,\dots,\Omega n)=\Omega'}} \mathrm{Min}(\mu A_1(x_1),\dots,\mu A_n(x_n))$$

si $f^{-1}(y) \neq 0$.

en otro caso $\mu B(y) = 0$.

←

Ejemplo 1.7: Sean X e Y, ambos, el universo de los números naturales.

- Función **sumar 4:** ***y=f(x)=x+4:***
  - ✓ *A=0.1/2+0.4/3+1/4+0.6/5;*
  - ✓ *B=f(A)=0.1/6+0.4/7+1/8+0.6/9;*

- Función **suma:** $\mathbf{y=f(x_1,x_2)=x_1+x_2}$**:**
  - ✓ *A_1=0.1/2+0.4/3+1/4+0.6/5;*
  - ✓ *A_2=0.4/5+1/6;*
  - ✓ *B=f(A_1, A_2)=0.1/7+0.4/8+0.4/9+1/10+0.6/11;*

1.2.1.6.2 Aritmética Difusa

Gracias al Principio de Extensión es posible extender las operaciones aritméticas clásicas al tratamiento de números difusos. De esta forma las cuatro operaciones principales quedan extendidas en:

- **Suma Extendida:** Dadas dos cantidades difusas A_1 y A_2, la función de pertenencia de la suma viene dada por la expresión:

$$\mu_{A_1+A_2}(y) = \mathrm{Sup}\{\mathrm{Min}(\mu_{A_1}(y-x), \mu_{A_2}(x)) \,/\, x \in \Omega\} \tag{1.54}$$

De este modo, la suma, queda expresada en términos de la operación del supremo. La suma extendida es una operación conmutativa, asociativa y no existe el concepto de número simétrico.

- **Diferencia Extendida:** Dadas dos cantidades difusas A_1 y A_2, la función de pertenencia de la suma viene dada por la expresión:

$$\mu_{A_1-A_2}(y) = \mathrm{Sup}\{\mathrm{Min}(\mu_{A_1}(y+x), \mu_{A_2}(x)) \,/\, x \in \Omega\} \tag{1.55}$$

De estas definiciones se puede obtener fácilmente que si A_1 tiene *n* términos y A_2 tiene *m* términos, el número de términos de A_1+A_2 y de A_1-A_2 es (n-1)+(m-1)+1, o lo que es lo mismo: n+m-1.

- **Producto Extendido:** El producto de dos cantidades difusas A_1 * A_2 se obtiene:

$$\mu A_1 \bullet A_2(y) = \begin{cases} \sup\{\min(\mu_{A_1}(z/y), \mu_{A_2}(y)) \,/\, y \in \Omega - \{0\}\} & \text{si } z \neq 0 \\ \max(\mu_{A_1}(0), \mu_{A_2}(0) & \text{si } z = 0 \end{cases} \tag{1.56}$$

- **División Extendida:** La división de dos cantidades difusas se define mediante:

$$\mu_{A_1 \div A_2}(y) = \mathrm{Sup}\{\mathrm{Min}(\mu_{A_1}(y.z), \mu_{A_2}(y)) \,/\, y \in \Omega\} \tag{1.57}$$

Basándose en una expresión particular del principio de incertidumbre adaptada al empleo de α-cortes y en un tipo de número difuso similar al descrito anteriormente, denominado número L-R, en [Dubois80] se describen fórmulas de cálculo rápido para las anteriores operaciones aritméticas.

1.2.1.7 Teoría de la Posibilidad

Esta teoría se basa en la idea de variables linguísticas y cómo estas están relacionadas con los conjuntos difusos [Zadeh78]. Así, se puede evaluar la *posibilidad* de que una determinada variable X sea o pertenezca a un determinado conjunto A, como el grado de pertenencia de los elementos de X en A.

Definición 1.20 *Sea un conjunto difuso A definido sobre Ω con su función de pertenencia $\mu_A(x)$ y una variable X sobre Ω (que desconocemos su valor). Entonces, la proposición "X es A" define una* ***Distribución de Posibilidad****, de forma que se dice que la "posibilidad" de que X = u vale $\mu_A(u)$, para todo valor u $\in$.*

2 Introducción al Control Difuso *(Fuzzy Control)*

El presente capítulo comienza con una escueta introducción a los conceptos generales de control. Posteriormente se desarrollan los bloques que conforman la estructura de un Controlador Difuso. Y por último se mencionan los métodos de ajuste en los controladores difusos junto a los distintos tipos existentes.

2.1 Antes del Control Difuso...

Desde que James Watt realizase en el siglo XVIII el primer trabajo significativo en control automático por medio del regulador de velocidad centrífugo para el control de la velocidad de una máquina de vapor [Ogata98], la teoría de control ha evolucionado enormemente pasando de la teoría clásica, que trata los sistemas con una entrada y una salida, o función de transferencia, a la teoría de control moderna, basada en el análisis, en el dominio del tiempo y la síntesis a partir de variables de estados.

Existen una serie de términos básicos que establecen una pequeña parte de la jerga utilizada en los sistemas de control y son, según [Ogata98]:

- *Variable Controlada:* Se trata de la cantidad o condición que se mide y controla. Normalmente la variable controlada será la salida (el resultado).

- *Variable Manipulada:* Es la cantidad o condición que el controlador modifica para afectar el valor de la variable controlada.

- *Controlar:* Significa medir el valor de la variable controlada del sistema y aplicar la variable manipulada al sistema para corregir o limitar una desviación en el valor medido a partir de un valor deseado.

- *Plantas:* A cualquier objeto físico que se va a controlar.

- *Procesos:* A cualquier operación que se va a controlar.

- *Sistemas:* Es una combinación de componentes que actúan juntos y realizan un objetivo determinado.

- *Perturbaciones:* Se trata de una señal que tiende a afectar negativamente el valor de la salida de un sistema.

- *Control realimentado (negativo):* Se refiere a una operación que, en presencia de perturbaciones impredecibles, tiende a reducir la diferencia entre la salida de un sistema y alguna entrada de referencia y lo continúa haciendo con base a ésta diferencia.

- *Sistemas de Control Realimentados o en Lazo Cerrado:* Se trata de un sistema que mantiene una relación prescrita entre la salida y la entrada de referencia, comparándolas y usando la diferencia como medio de control.

- *Sistemas de Control en Lazo Abierto:* Son aquellos sistemas en los cuales la salida no afecta la acción de control. En otras palabras, no se mide la salida ni se realimenta para compararla con la entrada. Por tanto, a cada entrada de referencia le corresponde una condición operativa fija; como resultado, la precisión del sistema depende de la calibración. Ante la presencia de perturbaciones no realiza la tarea deseada.

A continuación en la Figura 2.1 se visualiza mediante un diagrama de bloques un sistema de control industrial, formado por un controlador automático, un actuador, una planta y un sensor.

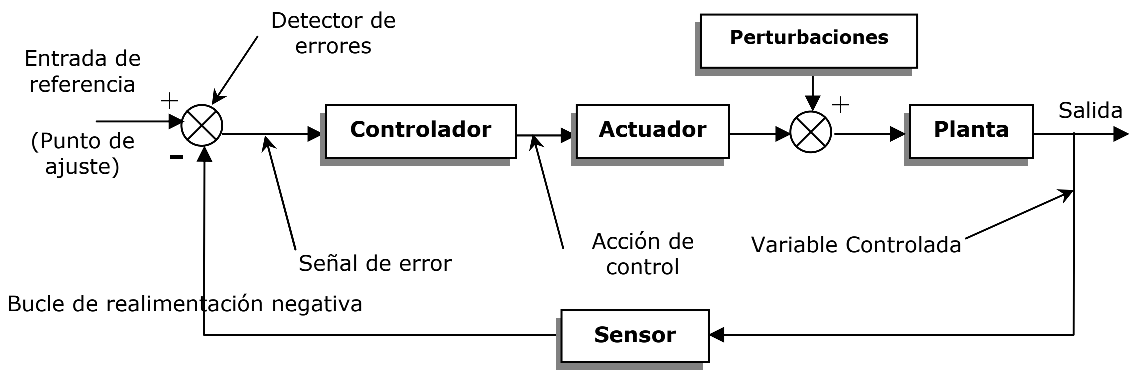


Figura 2.1: Diagrama de bloques de un sistema de control industrial genérico.

Básicamente, un controlador automático compara el valor real de la salida de una planta con la entrada de referencia (el valor deseado), determina la desviación y produce una señal de control que reducirá la desviación a cero o a un valor pequeño. La manera en la cual el controlador automático produce la señal de control se denomina *acción de control*.

De acuerdo a sus acciones de control podríamos clasificar los controladores industriales (analógicos) en [Ogata98]:

1. De dos posiciones o de encendido y apagado (On/Off).
2. Proporcionales (P).

3. Integrales (I).
4. Proporcionales-Integrales (PI).
5. Proporcionales-Derivativos (PD).
6. Proporcionales-Integrales-Derivativos (PID).

A la hora de describir un sistema es necesario obtener un modelo matemático del mismo, el cual se define como un conjunto de ecuaciones que representan la dinámica del sistema con precisión o, al menos, bastante bien. Un modelo matemático no es único para un sistema determinado. Un sistema puede representarse dependiendo de cada perspectiva. La dinámica de muchos sistemas, ya sean mecánicos, eléctricos, térmicos, económicos, biológicos, etc., se describen en términos de ecuaciones diferenciales las cuales se obtienen a partir de leyes físicas que gobiernan un sistema determinado, como las leyes de Newton para sistemas mecánicos y las leyes de Kirchhoff para sistemas eléctricos.

Un sistema moderno posee muchas entradas y salidas que se relacionan entre sí de forma compleja. Para analizar un sistema de este tipo, es esencial reducir la complejidad de las expresiones matemáticas, además de recurrir a un ordenador que realice gran parte de los tediosos cálculos necesarios en el análisis. Una de esas posibilidades es la propuesta por Liapunov [Ogata98]. Se trata de un método de análisis muy útil y poderoso para abordar los problemas de estabilidad de los sistemas no lineales y/o variantes con el tiempo. Aún así, hay muchos sistemas no lineales donde no es sencillo determinar su estabilidad.

Una aproximación alternativa al control de este tipo de procesos complejos consiste en investigar las estrategias de control empleadas por los operadores humanos. En muchos casos, éstos pueden controlar un proceso complejo de manera más eficaz que un sistema automático, basándose en su experiencia para efectuar el control. A partir de esta idea se forma el control difuso como una alternativa más (posteriormente se comentará que existen controladores interconectados por uno convencional (PID) y otro difuso formando lo que se denomina controlador híbrido) al diseño de sistemas de control clásicos en donde ya sea porque los parámetros son altamente complejos o desconocidos y/o su comportamiento no es lineal se hace necesario buscar otro camino al de obtener un modelo matemático del sistema a controlar y del controlador.

2.2 Controladores Difusos

Como se comentó anteriormente los sistemas reales presentan, en general, parámetros muy complejos o desconocidos y un comportamiento no lineal; ante esta situación la obtención de un modelo matemático del sistema mediante ecuaciones diferenciales puede convertirse en una tarea ardua y en el mejor de los casos el tratamiento de dicha información puede resultar un factor muy determinante (tiempo de computación).

Es por ello que, basándonos en la experiencia del operador humano a la hora de controlar un proceso, podemos mediante los conjuntos difusos convertir las reglas de control heurísticas[3], que proporciona el operador humano, en estrategias de control automáticas. Esencialmente, los sistemas de control difuso son concebidos con el propósito de incorporar la experiencia del operador o técnico del proceso al sistema de control.

Se podría decir que un controlador difuso es un algoritmo de control que se basa en una colección de reglas de control lingüísticas que constituyen el protocolo de control. Estas reglas expresan las relaciones cruzadas que existen entre las variables de medida del proceso y las variables de control. Dichas reglas están relacionadas entre sí por medio de una implicación difusa y una regla composicional de inferencia, junto con un mecanismo de concreción (defuzzificación), es decir, un mecanismo que traduce la acción de control difuso en una no-difusa (concreta). De forma inversa al de concreción se encuentra el mecanismo de difuminación (fuzzificación) que convierte los datos reales de entrada en valores lingüísticos difusos. Todos estos bloques que a continuación se comentan conforman la estructura genérica de un controlador difuso.

2.3 Estructura de un Controlador Difuso

La estructura principal de un *Fuzzy Knowledge Based Controller – Controlador Basado en Conocimiento Difuso* (FKBC) se ilustra en la Figura 2.2 según [Driankov96]. Algunos de estos elementos como: *Base de Reglas* y *Base de Datos* cumplen únicamente el papel en la fase de diseño del controlador *(flujo de información)* mientras que elementos como el de *Difuminación (FM – Fuzzification Module)* o *Concreción (DM – Defuzzification Module)* junto a la *Base de Conocimiento* y *Motor de Inferencia* componen la parte funcional del controlador *(flujo computacional)*. Hay que aclarar que tras la fase de diseño la *Base de Reglas* es utilizada también por el *Motor de Inferencia* en el proceso de cálculo.

Desde el punto de vista funcional la estructura del controlador podría quedar resumida según la Figura 2.3, de forma que cuatro serían los bloques que intervendrían en el proceso de control: *Fuzzificación, Motor de Inferencia, B. Conocimiento* y *Defuzzificación,* que posteriormente se comentarán de forma más detallada junto a los elementos de diseño.

[3] Métodos científicos basados en la investigación y la deducción.

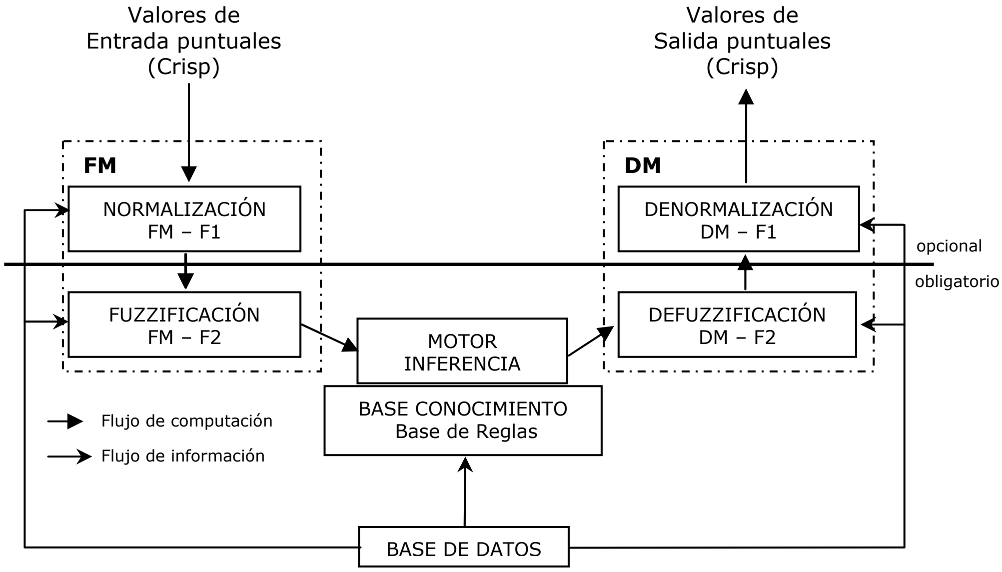


Figura 2.2: Estructura de un FKBC.

La estructura propuesta en [Driankov96] expone elementos *opcionales* tanto en el bloque de fuzzificación (FM) como en el de defuzzificación (DM) y son la *normalización* (FM – F1) y *denormalización* (DM - F1) respectivamente. Ambos módulos se comentarán a continuación.

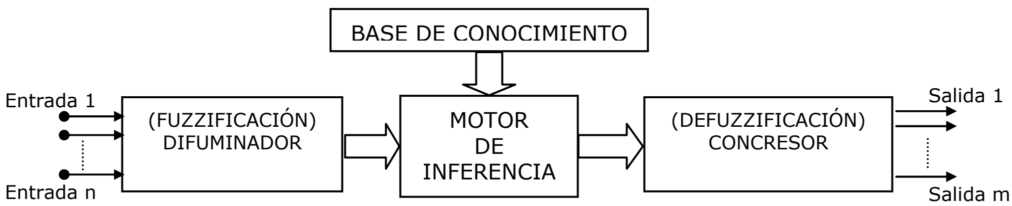


Figura 2.3: Estructura genérica de un controlador difuso.

2.3.1 Bloque Difuminador (Fuzzificador)

El bloque difusor desarrolla las siguientes dos *funciones*:

- Generar un escalado entre los valores físicos de las variables de medida del proceso a un universo de discurso *normalizado* (FM – F1). Cuando no es usado el módulo de (DM – F1) tampoco será necesario (FM – F1). Esta funcionalidad es opcional.

- Básicamente el bloque difusor (FM – F2) recibe las múltiples entradas concretas (valores *crisps* de entrada) que llegan al sistema y les asocia valores lingüísticos de forma que para cada valor concreto de entrada, la función de difuminación asociada a dicha entrada devolverá el grado de pertenencia con respecto a cada conjunto difuso o etiqueta que esté definido sobre el universo de discurso de la variable lingüística (véase Figura 2.4). En pocas palabras el bloque de difuminación actúa como un operador de conversión escalar-difuso u operador de difuminación.

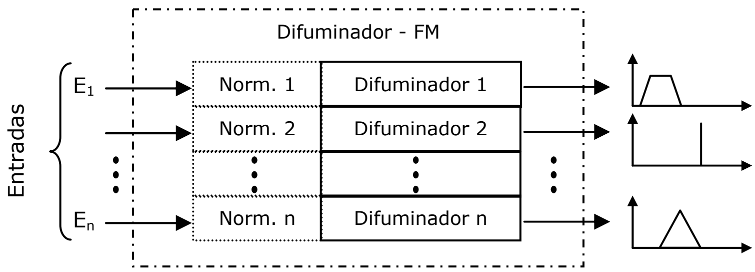


Figura 2.4: Conversión Escalar-Difusa del Bloque de Difuminación.

¿Cómo se difumina?. Así, el *proceso* consiste en trasladar al universo de discurso de la variable la función de pertenencia (véase sección 1.2.1.1) asociada al de difuminación de forma que el conjunto difuso quede centrado con respecto al valor *crisp* de entrada para esa variable medido en ese instante de tiempo (Figura 2.7).

El operador más sencillo de difuminación es el denominado "S*ingleton"*, el cual consiste en emplear el propio valor *crisp* de entrada, es decir, no se difumina (el valor crisp será el único valor del soporte y del núcleo del conjunto difuso). Para ilustrar esta y las restantes fases del proceso de difuminación véase el Ejemplo 2.1.

Posteriormente se procederá a realizar la *comparación* (véase sección 1.2.1.4.3) entre las etiquetas que conforman el universo de la variable y la entrada difuminada. De esta forma se obtendrá un valor de *posibilidad* para cada etiqueta, expresando en qué medida el valor actual es simila o pertenece a las etiquetas. En el Ejemplo 2.1 se ilustra la comparación de conjuntos difusos utilizando como t-norma el mínimo, pero éste concepto puede ser generalizado a cualquier t-norma. El valor de *posibilidad* será utilizado por el motor de inferencia en los antecedentes de las reglas que hagan mención a dicha variable.

Ejemplo 2.1: Supongamos un caso hipotético de conducción tal que se pretende controlar la distancia entre dos vehículos (Figura 2.5) a través de la velocidad y distancia entre coches (variables de estado o de entrada) y acción de control – intensidad de frenada (variable de control o de salida).

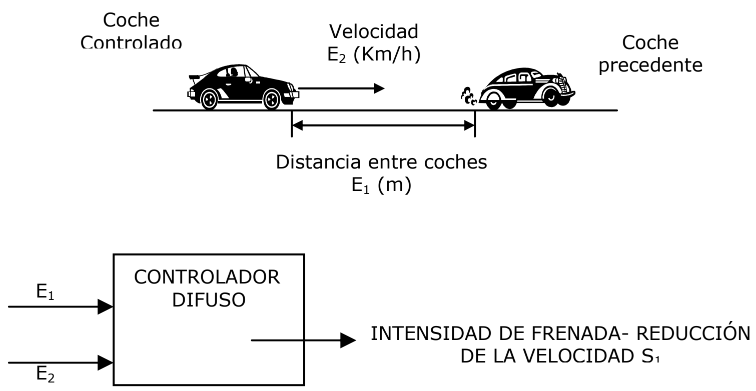


Figura 2.5: Caso hipotético de conducción.

Para ilustrar la fase de difuminación del proceso de fuzzificación considérese la variable de entrada E_1 (distancia entre coches) según las características difusas ilustradas en Figura 2.6.

Se consideran tres etiquetas que establecen sobre el universo de discurso el grado de proximidad o lejanía respecto al vehículo precedente. El tipo de difuminación seleccionado es una función triángular; la explicación a ésta selección vendría dada por la elección por parte del fabricante del automóvil al conocer que el sensor que mide dicha distancia presenta un margen de error de ± 0.5 metros, es decir, la existencia de una *tolerancia* o *margen de error* en el medidor físico se ve traducida en la utilización de un difuminador con función de pertenencia triangular. De forma general, las ventajas de la difuminación permiten minimizar los posibles errores al tomar los datos y también minimiza los posibles cambios ligeros en las variables de entrada al suavizar el comportamiento del sistema, ampliando el rango de influencia de la variable. Hay que aclarar que las etiquetas podrían (y deberían) definirse de forma diferente según la velocidad del coche en cada momento.

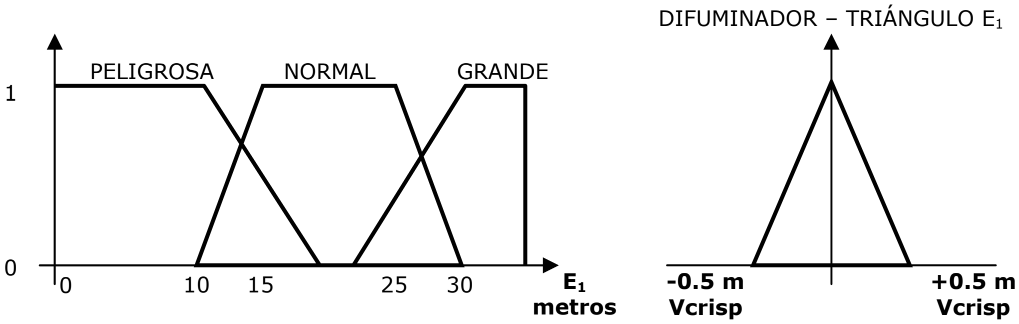


Figura 2.6: Variable Lingüística E_1 (distancia entre coches) y su Difuminador.

Considerando el instante tal que E_1 = 20m el proceso de fuzzificación devolverá el conjunto difuso que aparece punteado en la Figura 2.7 y comparando con las tres etiquetas obtenemos que:

20m ES UNA DISTANCIA PELIGROSA CON GRADO Hp = 0.35

20m ES UNA DISTANCIA NORMAL CON GRADO Hn = 0.95

20m ES UNA DISTANCIA GRANDE CON GRADO He = 0.30

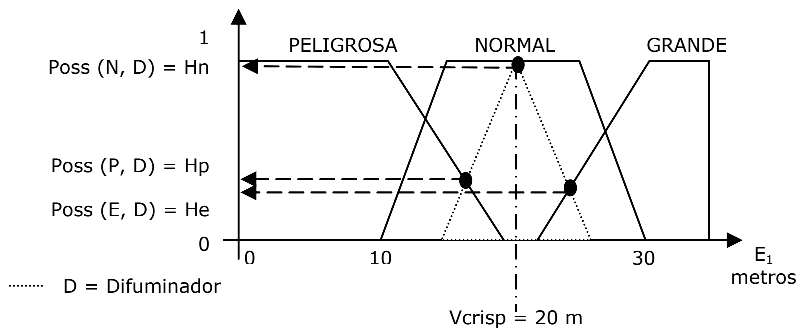


Figura 2.7: Proceso de Difuminación.

2.3.2 Bloque de la Base de Conocimiento (Conjunto de Reglas)

Un sistema difuso se caracteriza por un conjunto de sentencias lingüísticas basadas en el conocimiento experto. El conjunto de reglas de control forman la Base de Conocimiento, y contienen la inteligencia asociada al dominio de la aplicación y los objetivos de control.

Según [Lee90], la Base de Conocimiento posee dos *funciones* principales:

1. Proporciona las definiciones (sección 2.3.2.3) necesarias para determinar las reglas lingüísticas de control y la manipulación de los datos difusos del controlador.
2. Almacena los objetivos y criterios de control del dominio de los expertos mediante un conjunto de reglas lingüísticas de control.

Dicho conjunto de reglas lingüísticas de control se expresa, por lo general, mediante sentencias difusas SI-ENTONCES *(IF-THEN)* que se implementan fácilmente por sentencias condicionales difusas en términos de la lógica difusa.

2.3.2.1 Proposiciones Difusas

El razonamiento aproximado (sección 2.3.3) es usado y fundamentado con conocimiento expresado en *proposiciones atómicas*, las cuales son expresadas en un lenguaje natural, por ejemplo: "La temperatura es elevada".

Las proposiciones atómicas pueden tomar valores de verdad, dentro de un conjunto definido de valores posibles. La traslación formal y simbólica de este lenguaje natural en términos de variables lingüísticas conforma una proposición atómica difusa cuando dicha proposición contiene atributos con imprecisión. El significado o interpretación de una expresión atómica es entonces definida por un conjunto difuso o su correspondiente función de pertenencia (*elevada*) y la variable física (*temperatura*).

Basado en la notación de proposiciones atómicas difusas y *conectivos lingüísticos* tales como 'y - and' la conjunción ($\wedge$), 'o - or' la disyunción ($\vee$), 'not' la negación ($\neg$) y la implicación 'si-entonces - if-then' ($\rightarrow$), uno puede formar complejas proposiciones difusas o también denominadas "Proposiciones Bien Formadas" *(Well-Formed Propositions)*.

En el caso de la *conjunción,* si se consideran dos proposiciones atómicas "X es A" y "X es B" donde A y B son dos conjuntos definidos en el mismo universo de discurso de la variable X, entonces la conjunción expresa:

$$\text{X es A} \cap \text{B} \;\Leftrightarrow\; \mu_{A \cap B} \tag{2.1}$$

donde la expresión "X es A $\cap$ B" es definida por cualquier tipo de t-norma (véase sección 1.2.1.4.1). Cuando las proposiciones atómicas sean definidas sobre dominios distintos el significado de la conjunción 'y' será representado como una relación difusa.

Con respecto a la *disyunción* viene dada por la unión de forma que:

$$\text{X es A} \cup \text{B} \;\Leftrightarrow\; \mu_{A \cup B} \tag{2.2}$$

donde podrá ser definido, por cualquier tipo de s-norma (sección 1.2.1.4.1).

En la *negación* "X *no* es A" equivale a "X es $\neg$A" donde $\neg$A es el complemento de A (sección 1.2.1.4.2).

A su vez podemos definir otros tipos de proposiciones difusas en:

- *Proposiciones CUALIFICADAS (Qualified Propositions):* Añaden un grado (o etiqueta lingüística) a la proposición que forma una regla:

    - Grados de Certeza (Verdad, Falso, Casi verdad...).
    - Grados de Probabilidad (Probable, Poco probable, Normalmente...).
    - Grados de Posibilidad (Posible, Poco posible...).
    - Ejemplos: Es posible que si llueve entonces se llene el depósito, Probablemente si la temperatura sigue ascendiendo entonces las plantas se sequen.

- *Proposiciones CUANTIFICADAS (Quantified Propositions):* Pueden usarse cuantificadores difusos: muchos, pocos, la mayoría, frecuentemente, aproximadamente, etc. Cuando el cuantificador va en el antecedente se denominan *Reglas Cuantificadas en el Antecedente (Antecedent-Quantified)*.

    - Ejemplos: La Mayoría de los alumnos son ordenados. Frecuentemente, si la temperatura es alta, entonces la válvula está poco abierta.

Las características anteriores nos dan la siguiente clasificación general:

- *Proposiciones CATEGÓRICAS (Categorical Propositions):* No contienen ni cualificadores ni cuantificadores.

- *Proposiciones NO CATEGÓRICAS (Dispositional Propositions):* Proposiciones que no tienen que ser verdad SIEMPRE [Zadeh89].

2.3.2.2 Sentencias Difusas SI-ENTONCES *(IF-THEN)*

Un condicional difuso Si-Entonces se expresa simbólicamente como:

Si <proposición difusa> entonces <proposición difusa>

donde <proposición difusa> podrá ser única o compuesta mediante la unión de conectores (y/o) entre proposiciones más simples.

Una regla difusa describe la relación causal entre el estado del proceso (variables de estado o entrada) y la variables de salida (variables de control) del proceso, por ejemplo: Si la *Temperatura* y el *Ph* son variables de estado del proceso y *Riego* es la variable de control de salida entonces:

Si *Temperatura es baja* y *Ph es básico* entonces *Riego es poco*

es una expresión simbólica de la siguiente relación causal propuesta en el lenguaje natural:

Si resulta que el valor actual de la Temperatura es baja y el valor actual del Ph es básico entonces el Riego será poco.

O dicho en otras palabras:

Si ocurre que la Temperatura actual tiene la propiedad de ser baja y no tiene que cambiar el Ph actual tiene la propiedad de ser básico entonces ésta es una causa para que el Riego que tenga la propiedad de ser poco.

Supóngase dos variables lingüísticas X e Y donde cada valor lingüístico se interpreta mediante una función de pertenencia definida en X e Y, es decir:

$$\begin{aligned} \forall x \in X : \mu_A(x) : X \rightarrow [0,1] \\ \forall y \in Y : \mu_B(y) : Y \rightarrow [0,1] \end{aligned} \tag{2.3}$$

Existe una relación funcional entre los valores *crisp* de X y los de Y dados por una función f(x) de carácter bidireccional, es decir,

Si se da un valor de x, entonces y = f(x)
Si se da un valor de y, entonces $x = f^{-1}(x)$

Con el uso de las reglas Si-Entonces conseguimos una aproximación de la función analítica f(x). El resultado de esta aproximación pone de manifiesto que cada una de las reglas (Si-Entonces) pueden hacer que se compute un valor de Y sólo cuando está presente un valor de X.

El significado de la expresión simbólica:

Si X es A entonces Y es B,

se representa como una relación difusa en donde "X es A", denominado antecedente de la regla, es representado mediante un conjunto difuso, al igual que el consecuente de la misma "Y es B". El significado del condicional difuso es una relación difusa μ_R tal que:

$$\forall x \in X, \forall y \in Y : \mu_R(x,y) = \mu_A(x,y) * \mu_B(x,y), \tag{2.4}$$

donde '*' puede ser el producto cartesiano o cualquier operador difuso de implicación (apartado 2.3.3).

Cuando haya proposiciones difusas compuestas, la función de pertenencia correspondiente a cada componente proposicional se determina previa aplicación de los conectivos lingüísticos (apartado 2.3.2.1), y finalmente el operador '*'.

2.3.2.3 Tipos de Reglas

A continuación se exponen algunos tipos de reglas:

- *Reglas con EXCEPCIONES (Unless Rules):* Son aquellas reglas que como su nombre indica incluyen (para su no cumplimiento) una excepción, por ejemplo: *Si la Temperatura es Alta, entonces se abre poco la válvula, EXCEPTO que haya poco combustible.*

- *Reglas GRADUALES (Gradual Rules):* Son reglas que introducen una proporcionalidad entre variable de control y de estado, por ejemplo: *Cuanto mayor temperatura, más abrir la válvula.*

- *Reglas CONFLICTIVAS y Potencialmente Inconsistentes:* son reglas que pueden generar problemas o malos resultados, pues suelen representar información contradictoria.

    - Reglas con el mismo antecedente y consecuentes contradictorios: SI A ENTONCES B, y SI A ENTONCES $\neg$ B.
    - Reglas encadenadas en ambos sentidos negando un consecuente: SI A ENTONCES B, y SI B ENTONCES $\neg$ A.

Según [Cordón94], en el diseño de controladores difusos se cuenta con dos tipos de reglas de control difuso:

- *Reglas de Control Difuso de Evaluación del Estado del Proceso:* La mayoría de controladores difusos tiene reglas de control de este tipo. Se caracterizan por un conjunto de reglas de la forma:

$$
\begin{array}{c}
R_1\text{: Si X es } A_1 \text{ ,..., and Y es } B_1 \text{ entonces Z es } C_1 \\
R_2\text{: Si X es } A_2 \text{ ,..., and Y es } B_2 \text{ entonces Z es } C_2 \\
\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\
\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\
R_n\text{: Si X es } A_n \text{ ,..., and Y es } B_n \text{ entonces Z es } C_n,
\end{array}
$$

donde X,..., Y, Z son variables lingüísticas representando las variables de estado del proceso y la variable de control Z. Los valores A_i ,..., B_i y C_i con i= 1,2,..., n son etiquetas de las variables lingüísticas X,..., Y, Z en los universos de discurso U,..., V, y W, respectivamente.

En una versión más general, el consecuente se representa como una función de las variables de estado del proceso, es decir:

$$R_i\text{: Si X es } A_i \text{ ,..., and Y es } B_i \text{ entonces } Z = f(X,\ldots,Y)$$

Las reglas de control de este tipo, evalúan el estado del proceso en un tiempo *t* y computan una acción de control difuso en función de (X,...,Y).

- *Reglas de Control Difuso para la Evaluación de Objetos:* Estas reglas se obtienen a partir de la experiencia de un experto operador. Una regla típica se describe de la siguiente forma:

R_i: Si U es $C_i \rightarrow$ (X es A_i y Y es B_i) entonces U es C_j

En términos lingüísticos, la regla se interpreta como "si el índice de funcionamiento X es A_i y el índice Y es B_i cuando se elige una acción de control U con valor C_i, entonces esta regla es seleccionada y la acción de control C_j se toma como la salida del controlador."

2.3.2.4 Fuente y Obtención de Reglas de Control Difuso

A continuación se comentan los cuatro modelos de obtención de reglas de control difuso. No son totalmente excluyentes entre sí, y parece probable que sea necesario tomar una combinación de ellos para construir un método efectivo para la derivación de reglas de control difuso:

1. *Conocimiento basado en la experiencia de expertos y conocimiento de ingeniería del control*

   Muchos expertos han encontrado que las reglas de control difuso son una forma conveniente para expresar su conocimiento del dominio. Esto explica porqué la mayoría de los controladores difusos se basan en el conocimiento y la experiencia expresada en el lenguaje de las reglas Si-Entonces.

   La formulación de reglas de control difuso puede conseguirse por medio de dos métodos heurísticos:

   i. El más comúnmente empleado lleva consigo una verbalización introspectiva del conocimiento humano. Un ejemplo son las operaciones realizadas por un experto para controlar un horno de cemento.

   ii. Otra perspectiva ataca el problema mediante la interrogación directa a expertos bien experimentados u operadores, utilizando un cuestionario cuidadosamente planeado. De esta forma, podemos formar un prototipo de reglas difusas para un dominio de aplicación concreto.

2. *Conocimiento basado en las acciones de control de operadores adiestrados*

   En muchos sistemas industriales con control en manos de operadores humanos, las relaciones entre entrada y salida no se conocen con suficiente precisión para hacer posible el diseño de control clásico mediante simulación y modelado. Incluso operadores adiestrados pueden controlar tal sistema demasiado bien sin tener una serie de modelos cuantitativos en mente. En efecto, un operador humano emplea, consciente o inconscientemente, un conjunto de reglas if-then difusas empleando variables lingüísticas para controlar el proceso. En la práctica, tales reglas pueden deducirse de la observación directa de las acciones del controlador humano teniendo en cuenta los datos de entrada y salida.

3. *Conocimiento basado en el modelo difuso de un proceso*

Bajo la perspectiva lingüística, la descripción de las características dinámicas de un proceso a controlar pueden ser consideradas como un modelo difuso del proceso. Basado en el modelo difuso podemos generar un conjunto de reglas de control difusas para dotar de funcionamiento óptimo a un sistema dinámico. El conjunto de reglas difusas forma la base de reglas de un controlador difuso. Aunque esta perspectiva es un poco más complicada, produce mejor funcionamiento y respuesta, y provee una estructura más conveniente para tratar de forma teórica con el controlador difuso. Sin embargo, este aspecto del diseño de controladores difusos no ha sido todavía desarrollado.

4. *Conocimiento basado en aprendizaje*

Muchos controladores difusos han sido construidos para emular el comportamiento humano en análisis y toma de decisiones, pero pocos se han centrado en el aprendizaje humano, a saber, la habilidad para crear reglas de control difusas y modificarlas basándose en la experiencia. El SOC *(Self-Organising Controller)* tiene la estructura jerárquica que consiste en dos bases de reglas. La primera de ellas es la base de reglas general que se encuentra en todo controlador difuso. La segunda está formada por "meta-reglas" que exhiben de forma adecuada la habilidad de aprendizaje humana de forma que se pueden crear y modificar las reglas de esta base de forma que se consigan efectos generales beneficiosos para el funcionamiento del sistema.

2.3.3 Bloque de Inferencia Difusa (Motor de Inferencia)

El proceso de inferencia difusa se basa en el concepto de *Razonamiento Aproximado*, a continuación se describe dicho concepto formalizado por Zadeh.

- **Razonamiento Aproximado:** Según Zadeh se refiere al proceso de obtener consecuencias (posiblemente imprecisas) a partir de una colección de premisas constituidas por afirmaciones o hechos vagos e imprecisos. Por naturaleza, este tipo de razonamiento es más bien cualitativo que cuantitativo y prácticamente cae fuera del ámbito de aplicabilidad de la lógica clásica. El Razonamiento Aproximado representa, en general, la capacidad humana de tomar decisiones racionales en ambientes complejos y/o inciertos, hecho que distingue la inteligencia humana de las capacidades de una máquina.

  Las bases conceptuales para el desarrollo formal del Razonamiento Aproximado hay que buscarlas en la Teoría de Conjuntos Difusos y en la lógica difusa debiendo considerarse a Zadeh como el pionero de tal formalización. De este modo, *la Inferencia en Razonamiento Aproximado equivale a un cálculo con conjuntos difusos que representan la semántica de un cierto grupo de proposiciones difusas*. En una forma general, dadas las funciones $\mu_A(x)$ y $\mu_B(x)$, las cuales representan la semántica de la proposición "X es A" y del condicional difuso "Si X es A, entonces Y es B", es posible obtener la función de pertenencia que representa la semántica de la conclusión "Y es B".

El ''*Modus Ponems''* (la regla básica de deducción en la lógica de predicados) es el método de inferencia mejor conocido y más utilizado. Puede establecerse en los siguientes términos:

- **Modus Ponens:** Supuesto que la implicación "Si p entonces q" es cierta y dado que ocurre *p* (es decir, que el hecho o proposición *p* es cierta), entonces se ha de concluir que el hecho o proposición *q* también es cierto:

$$\begin{array}{l} p \;\rightarrow\; q \\ \underline{p \qquad\quad} \\ q \end{array} \tag{2.5}$$

  En muchos casos, p y q contienen conocimiento acerca de variables. El caso más simple es aquel en el que p y q son afirmaciones acerca de sendas variables, es decir, p tiene la forma "X es A" y q corresponde a "Y es B", donde X e Y son variables que toman valores en sendos universos, no necesariamente diferentes, mientras que

A y B siguen siendo propiedades sobre los valores de X e Y. En este caso, a partir de la regla "Si X es A, entonces Y es B" y de "X es A" podemos deducir el hecho "Y es B":

$$\begin{array}{l} X \text{ es } A \;\rightarrow\; Y \text{ es } B \\ X \text{ es } A \\ \hline Y \text{ es } B \end{array} \tag{2.6}$$

Indudablemente, el *Modus Ponens* puede extenderse de modo natural a reglas más complejas conteniendo más de una variable en el antecedente, es decir, de la forma: "Si X es A **y/o** Y es B, entonces Z es C". Nótese que, en este caso, las propiedades pueden estar ligadas por conjunción o disyunción.

Desde el punto de vista del Razonamiento Aproximado, la situación que interesa es la deducción cuando la información disponible es imprecisa, incompleta o no totalmente fiable, es decir, cuando las proposiciones contienen predicados difusos. La lógica difusa proporciona un marco adecuado para el tratamiento de la incertidumbre porque, en contraste con los sistemas lógicos tradicionales, su principal objetivo es la inferencia a partir de conocimientos, imprecisos más que exactos. Para este caso puede usarse el "*Modus Ponens*" generalizado, que se establece en los siguientes términos:

$$\begin{array}{l} X \text{ es } A \;\rightarrow\; Y \text{ es } B \\ X \text{ es } A' \\ \hline Y \text{ es } B' \end{array} \tag{2.7}$$

donde, X e Y son variables sobre universos de discurso U y V respectivamente, y además A, B, A′ y B′ son conjuntos difusos (o etiquetas lingüísticas) de los respectivos universos de discurso, (que también pueden considerarse como informaciones difusas o restricciones flexibles relativas a las mencionadas variables). La conclusión, en este caso, viene definida por un conjunto difuso B′ sobre el universo de discurso de Y.

Ahora bien, el problema que se plantea ahora es como obtener ese nuevo conjunto difuso B′. La respuesta nos la da Zadeh a través de la función nombrada como *Regla Composicional de Inferencia* que se comenta a continuación.

La Regla Composicional de Inferencia fue introducida por Zadeh en 1973 como herramienta para traducir el "*Modus Ponens*" de la lógica clásica a la lógica difusa. Posteriormente ha sido formalizada y generalizada como método de inferencia, de tal manera que su formulación original ha pasado a ser un caso particular. Desde el punto de vista de su interpretación y aplicaciones, especialmente en el control difuso, se considera más interesante el planteamiento inicial de Zadeh, debido a lo que se ha comenzado estudiando cuestiones referentes al *"modus ponens"* para pasar después a la versión general de la regla composicional [Delgado91], [Driankov96] y [Lopez90].

- **Regla Composicional de Inferencia:** La regla introduce una relación difusa R que liga los valores de X e Y, es decir, un conjunto difuso en el producto cartesiano de los universos de discurso de $X \times Y$, tal que:

$$\mu_R(X, Y) = F(\mu_A(X), \mu_B(Y)) \tag{2.8}$$

El conjunto difuso B' ha de estar engendrado o producido por A' sobre Y a través de R. Por tanto, puede escribirse $B' = A' \bullet R$ y la cuestión ahora es como construir F y la composición $\bullet$ para obtener B'.

Para resolver estos problemas se han dado múltiples soluciones en la literatura especializada. En todos ellos, no obstante, el punto de partida lo proporciona el principio de extensión de Zadeh que, en el contexto actual se traduce en:

$$\mu_{B'}(Y) = \max_{x \in X} \{\mu_{A'}(X)\ t\ \mu_R(X, Y)\} \tag{2.9}$$

donde t representa una t-norma.

La forma efectiva de realizar las inferencias, por tanto, descansa en la elección que se haga de la función F y de la t-norma t, obteniéndose consecuentemente lo que podríamos denominar como distintos modos de razonar.

Basándose en estos conceptos, la expresión general de la regla composicional de inferencia es la siguiente:

$$B'(Y) = \operatorname{Sup}_{x \in X} \{ A'(X)\ t\ I(A(X), B(Y)) \} \tag{2.10}$$

donde t es una t-norma y I es una *Función de Implicación.*

En la literatura especializada [Castro91], [Lopez90], [Magrez89], [Mizumoto87] y [Predycz98] se encuentra una clasificación de las funciones de implicación caracterizadas por estar encasilladas dentro de una serie de familias. La clasificación fue propuesta por Trillas y Valverde en [Trillas85] y está constituida por los siguientes modelos: las implicaciones fuertes o **S-Implicaciones**, las residuales o **R-Implicaciones** y las implicaciones de la mecánica cuántica o **QM-Implicaciones**. Las normas triangulares o **t-normas**, no son clasificadas por Trillas dentro de las funciones de implicación al no verificar la axiomática que propone. Pese a ello, se citarán junto a los tres grupos anteriores debido a la gran importancia que presentan en control difuso.

- **S-Implicaciones:**

$$x \to y \equiv I^S(x,y) = s\,(\,n(x), y), \tag{2.11}$$

donde s es una t-conorma (o s-norma) y n una función de negación fuerte.

Este tipo de implicaciones provienen del formalismo de la lógica clásica $p \to q = \neg p \vee q$.

Ejemplos de este modelo de implicaciones son los siguientes:

- *S-Implicación de Diene (o Kleene):*

$$I^S(x,y) = \max\,(\,1 - x, y), \tag{2.12}$$

generada por la t-conorma *s(x,y) = max (x,y)* y la función de negación uno menos, *n(x) = 1x*.

- *S-Implicación de Lukasiewicz:*

$$I^S(x,y) = \min\,(\,1, 1 - x + y) \tag{2.13}$$

- *S-Implicación de Mizumoto (o Reichenbach):*

$$I^S(x,y) = 1 - x + xy,$$

(2.14)

generada por la t-conorma s(x,y) = max (x,y) y la función de negación uno menos, n(x) = 1 - x.

- **R-Implicaciones:**

$$x \to y \equiv I^{R}(x,y) = \mathrm{Sup}\{\, z \in [0,1] : x\ t\ z \le y \,\}, \tag{2.15}$$

donde t es una t-norma.

Ejemplos de este modelo de implicaciones son los siguientes:

- *R-Implicación de Gödel:*

$$I^{R}(x,y) = \{\, 1 \text{ si } x \le y,\ y \text{ en otro caso} \,\} \tag{2.16}$$

- *R-Implicación de Göguen:*

$$I^{R}(x,y) = \{\, 1 \text{ si } x \le y,\ y/x \text{ en otro caso} \,\} \tag{2.17}$$

- *R-Implicación de Rescher-Gaines:*

$$I^{R}(x,y) = \{\, 1 \text{ si } x \le y,\ 0 \text{ en otro caso} \,\} \tag{2.18}$$

- **QM-Implicaciones:**

$$x \to y \equiv I^{QM}(x,y) = \mathrm{Max}\,(1 - x, \mathrm{Min}(x,y)) \tag{2.19}$$

- **T-normas como Funciones de Implicación:**

En los trabajos de [Gupta91A] y [Gupta91B] se propone el uso de las t-normas como funciones de implicación difusas. Esta idea da lugar a una nueva familia de funciones de implicación de entre la que se pueden tomar el *Producto Lógico (Mínimo), Producto de Hamacher, Producto Algebraico, Producto de Einstein, Producto Acotado, Producto Drástico*... (apartado 1.2.1.4.1).

Los controladores que introducen esta idea se denominan *Controladores difusos basados en t-normas*.

El **Motor de Inferencia** constituye el núcleo del controlador difuso. Es el encargado de inferir las acciones de control simulando el proceso de decisión humano mediante el uso de una implicación difusa y las reglas de inferencia de la lógica difusa. Utiliza las técnicas de los Sistemas Basados en Reglas para la inferencia de los resultados. Para entender el funcionamiento del mismo se procede a explicar los cálculos que se realizan con las reglas difusas.

En el caso de antecedentes compuestos si se tiene una colección de *N* reglas del tipo:

k = 1, 2, ... , N SI X es A_k y Y es B_k ENTONCES Z es C_k

donde se considera el antecedente del tipo: (X, Y) es P_k, y P_k es calculado con una t-norma:

$$P_k\,(x, y) = A_k\,(x)\ \mathrm{t}\ B_k\,(y)$$

Si el operador fuese la disyunción (o), se tomaría una S-norma.

Para ilustrar el proceso consideraremos entradas *crisp* para X e Y: a y b respectivamente.

Sea m_k el valor resultante de aplicar la t-norma a los valores obtenidos en el antecedente de la regla *k*: $m_k = A_k\,(a)\ \mathrm{t}\ B_k\,(b)$. El valor m_k es llamado *"Grado de Activación" (Activation Degree)* y mide la contribución de la regla *k* en la inferencia global.

El conjunto difuso resultante C es calculado como la unión de los conjuntos difusos C'_k obtenidos en cada regla:

$$C(z) = \cup_{k=1}^{N} C'_k = S_{k=1}^{N}\left(m_k\ \mathrm{t}\ C_k(z)\right), \qquad \forall z \in Z; \tag{2.20}$$

Al efectuar una inferencia sobre un conjunto de reglas, se deben elegir apropiadamente los siguientes operadores:

1) Una t-norma para definir el operador de conjunción (y) y una s-norma para el operador de disyunción (o), que se aplicará en el antecedente y el consecuente de cada regla.

2) Una función para definir el significado de cada regla k, o sea el significado de la implicación.

3) Una t-norma para la Regla Composicional de Inferencia.

4) Un operador de Agregación *Ag* para la Regla de Combinación (s-norma utilizada en el cálculo de I).

De esta forma si se disparán *N* reglas simples del tipo "SI X es A_k ENTONCES B es Y_k" con k=1...N, sabiendo que el valor de la variable de entrada X es A, el valor de la variable de salida Y será el conjunto difuso:

$$B(y) = \mathrm{Sup}_x\left(A(x)\ t \underset{k=1}{\overset{N}{\mathrm{Ag}}} \left(I(A_k(x), B_k(y)) \right) \right) = \underset{k=1}{\overset{N}{\mathrm{Ag}}} \left(\mathrm{Sup}_x \left(A(x)\ t \left(I(A_k(x), B_k(y)) \right) \right) \right) \tag{2.21}$$

La Regla Composicional de Inferencia puede aplicarse también localmente a cada regla y agregar los resultados al final.

Ejemplo 2.2: Se consideran entradas *crisp* para X e Y, los valores a y b respectivamente. Por simplificación se suponen dos reglas de formato:

$$\text{Si X es } A_k \text{ y Y es } B_k \text{ Entonces Z es } C_k \text{, donde } k \in \{i, j\},$$

usando la t-norma del *mínimo* para los antecedentes (m_k = min {$A_k(a)$, $B_k(b)$}), y la t-norma del *mínimo* o del *producto* como función de Implicación. En la Figura 2.8 se representa el proceso de inferencia: En la parte superior se representan primero los dos antecedentes de la regla i, luego el grado de activación para esa regla (t-norma del mínimo) y luego el resultado de esa regla usando dos funciones de implicación distintas (mínimo y producto). De igual forma, en esa Figura se representa la regla j en la parte inferior. En el centro, se representa el resultado, como la unión de los resultados (usando la s-norma del máximo).

Obsérvese que los resultados obtenidos son distintos según se emplee un operador de implicación u otro (mínimo y producto respectivamente).

Resumiendo, el *Proceso General de Inferencia* es el siguiente:

1. *Emparejar Antecedentes y Entradas:* Para cada regla se calcula el grado de emparejamiento entre cada proposición atómica de su antecedente y el valor correspondiente de la entrada (difuminado o no).

2. *Grado de Activación o Agregación de los Antecedentes:* Para cada regla se calcula el grado de activación aplicando una conjunción (t-norma) o disyunción (s-norma) según corresponda a los valores anteriores del primer paso.

3. *Resultado de cada Regla:* Para cada regla se calcula su valor resultante según su grado de activación y la semántica elegida para la regla. Este es el paso más largo y complejo pues para cada valor en las salidas se debe calcular el mayor valor de la operación, para todos los posibles valores de la entradas (operación Sup_x).

4. *Regla de Combinación:* Agregación de todos los resultados individuales obtenidos de cada una de las reglas aplicadas.

Una vez realizado el proceso de inferencia se pasa a la fase de concreción, requisito fundamental en aplicaciones de Ingeniería dado que las variables de salida en un sistema físico deben ser concretas. Un actuador no manipula expresiones cualitativas sino cuantitativas, valores puntuales o también denominados *crips*.

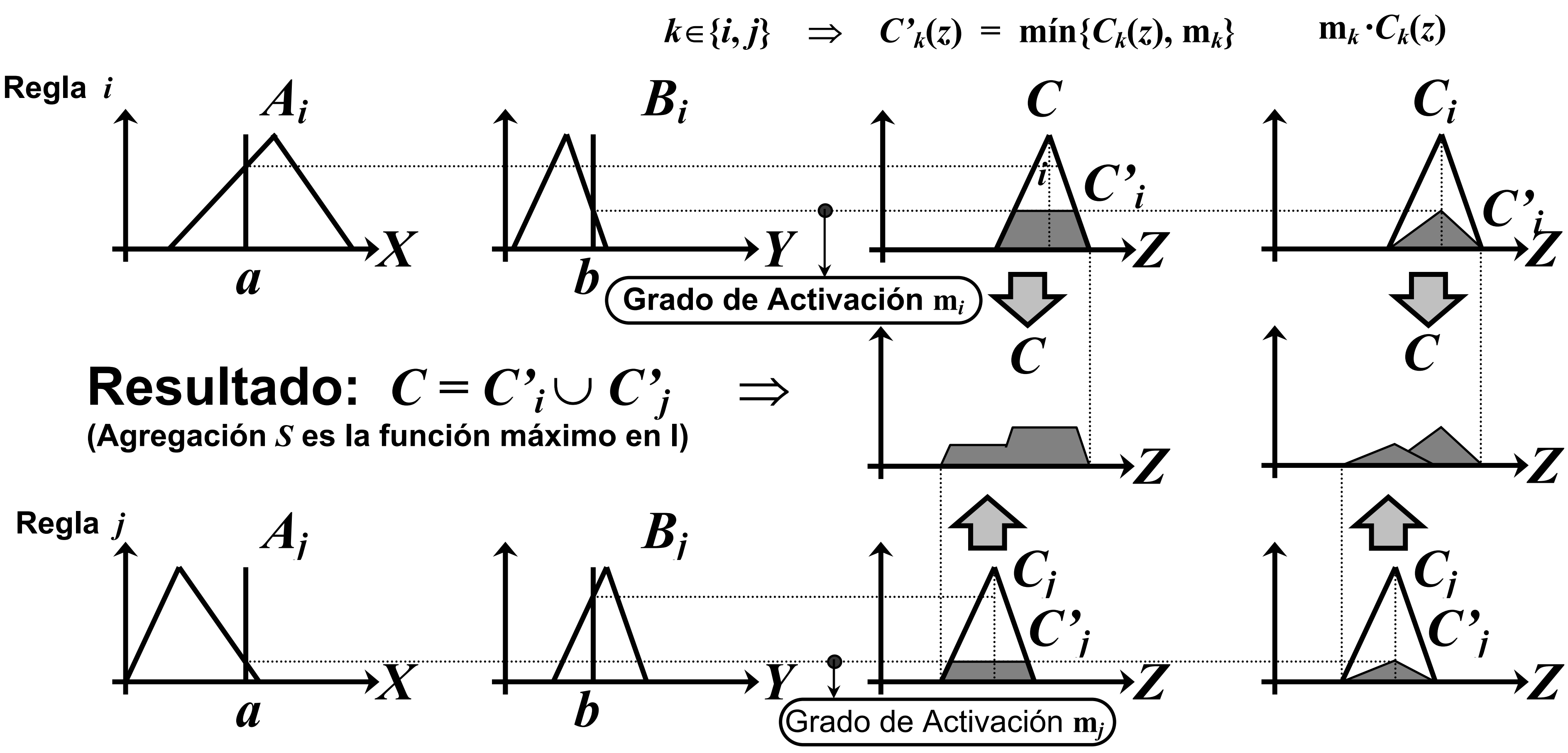


Figura 2.8: Proceso de Inferencia del Ejemplo 2.2

2.3.4 Bloque Concresor (Defuzzificador)

Las variables de salida del controlador difuso deben presentarse de forma concreta o determinista (valores *crisps*), pues cualquier proceso industrial utiliza actuadores ya sean mecánicos, neumáticos, eléctricos o de cualquier otro tipo que aceptan únicamente señales concretas (sin ambigüedad).

Una vez obtenido el conjunto difuso tras el proceso de inferencia sobre la variable de salida, se determina el proceso por el cual el conjunto difuso inferido es convertido a valor numérico concreto representativo de dicho conjunto difuso. Esta fase se denomina *proceso de concreción o defuzzificación* (véase Figura 2.9).

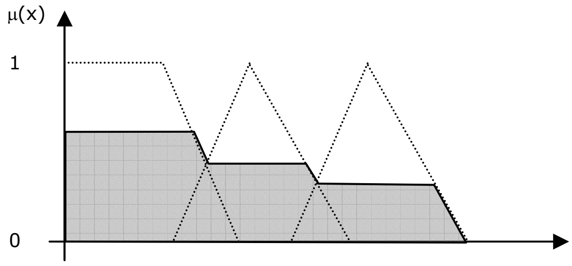


Figura 2.9: Conjunto difuso (zona sombreada) de salida tras el proceso de inferencia.

Como puede observarse, de forma genérica tras el proceso de inferencia sobre cada variable de salida se obtendrá un conjunto difuso del tipo *Trapecio Extendido* (como el ejemplo de la Figura 2.9). Partiendo de esta situación, el bloque concresor deberá devolver de dicho conjunto difuso un valor representativo del mismo. A su vez cada variable de salida podrá tener asociado un tipo de Concresor (Figura 2.10).

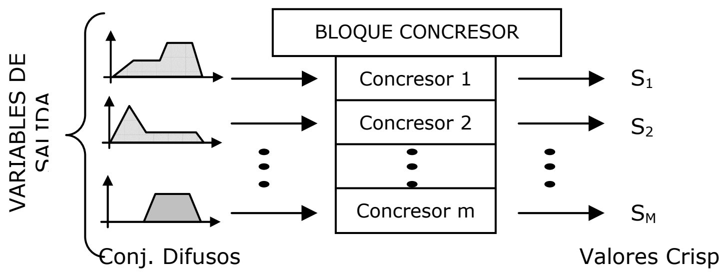


Figura 2.10: Bloque Concresor.

2.3.4.1 Métodos de Defuzzificación o Concreción

Para encontrar un valor que sea representativo del conjunto difuso resultante tras el proceso de inferencia varios son los métodos que pueden tomarse, pero antes se han de distinguir dos grupos principales:

- **Grupo A:** Están basados en el nuevo conjunto A agregando las funciones de pertenencia de las variables de salida de todas las reglas.

- **Grupo B:** Están basados directamente en los conjuntos B_i resultantes de cada regla individualmente (sin hacer la agregación).

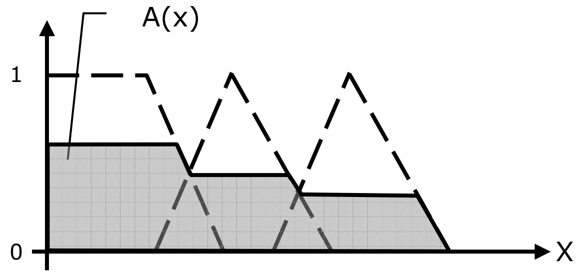


Figura 2.11: Conjunto difuso A(x) – Grupo A -.

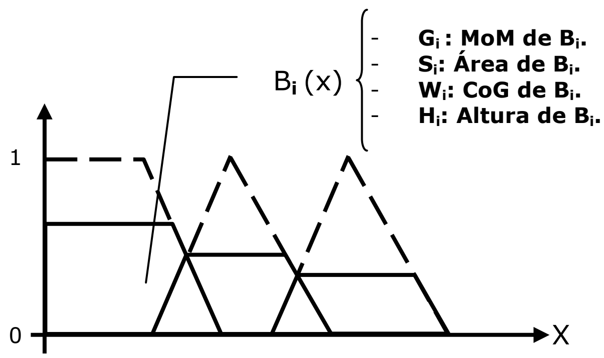


Figura 2.12: Conjuntos difusos B_i(x) – Grupo B -.

La diferencia entre un grupo y otro es la producida por aplicación del operador de agregación sobre los conjuntos B_i para la obtención de A.

$$A(x) = \bigcup_{i=1}^{n} B_i(x) \tag{2.22}$$

donde,

- **A(x):** Conjunto difuso resultado del proceso agregación ($\cup$) sobre una variable de salida concreta.
- **B_i(x):** Conjunto difuso resultante de la regla i, para una variable de salida concreta formado por las funciones de pertenencia de la variable y los grados de activación asociados.
- **n** es el número de conjunto $A_i(x) \in X$.

En la Tabla 2.1 se exponen algunos de los métodos de concreción más utilizados [Driankov96], donde $\hat{x}$ es el valor crisp resultante:

Métodos de Concreción	Descripción – Expresión
Media de Máximos (MoM)	Media de los valores que maximizan el conjunto A. $\hat{x} = \frac{\sum_{j=1}^{r} M_j}{r}$, donde $M_j = \left\{ x_j \,/\, B_i(x_j) = \max_{x \in X}(B_i(x)) \right\}$ y r es el número de puntos x_j que cumplen esa propiedad (que toman en B_i el valor máximo de B_i)
Primer Máximo	Se calcula el menor valor de los que maximizan el conjunto A.
Último Máximo	Se calcula el mayor valor de los que maximizan el conjunto A.
Centro de Gravedad (CoG)	Centro de Gravedad del conjunto A. $\hat{x} = \frac{\int_X A(x)\, x\, dx}{\int_X A(x)\, dx}$
CoG de valores importantes	Se calcula el CoG pero evitando aquellas partes de A que tengan una altura menor a cierto nivel β.
CoG potenciado por un factor δ	δ = 1: CoG Normal. $\delta \to 0$: Tiende a MoM. $\hat{x} = \frac{\int_X A^{\delta}(x)\, x\, dx}{\int_X A^{\delta}(x)\, dx}$
Centro de Área (CoA)	Valor que iguala el área de A que quede a la izquierda y a la derecha de $\hat{x}$. $\int_{-\infty}^{\hat{x}} A(x)\, dx = \int_{\hat{x}}^{\infty} A(x)\, dx$
CoA de valores importantes	Se calcula el CoA pero ignorando aquellas parte de A que tengan una latura menor a cierto nivel β.

Tabla 2.1: Tipos de Concresores – Grupo A - .

Otros métodos utilizan directamente los conjuntos $B_i(x)$ y sus características:

- G_i: MoM de B_i (Punto de Máximo Criterio) - $G_i = \dfrac{\sum_{i=1}^{r} M_i : M_i = \max_{x \in X} B_i(x)}{r}$
- S_i: Área o Superficie del conjunto B_i.
- W_i: Centro de Gravedad del conjunto B_i - $\hat{x} = \dfrac{\int_X B_i(x)\, x \, dx}{\int_X B_i(x)\, dx}$
- H_i: Altura del conjunto B_i.

Métodos de Concreción	**Descripción – Expresión**
CoG ponderado por el área	$\hat{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} S_i \bullet W_i}{\sum_{i=1}^{n} S_i}$
CoG ponderado por la altura	$\hat{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} H_i \bullet W_i}{\sum_{i=1}^{n} H_i}$
PMC ponderado por el área	$\hat{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} S_i \bullet G_i}{\sum_{i=1}^{n} S_i}$
PMC ponderado por la altura	$\hat{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} H_i \bullet W_i}{\sum_{i=1}^{n} H_i}$
CoG del B_i de mayor área	$\hat{x} = W_j : A_j = \max_{i=1,\dots,n}\{S_i\}$
CoG del B_i de mayor altura	$\hat{x} = W_j : A_j = \max_{i=1,\dots,n}\{H_i\}$
PMC del B_i de mayor área	$\hat{x} = G_j : A_j = \max_{i=1,\dots,n}\{S_i\}$
PMC del B_i de mayor altura	$\hat{x} = G_j : A_j = \max_{i=1,\dots,n}\{H_i\}$
Media del mínimo y máximo PMC	$G_{MIN} = \min_i\{G_i\};\ G_{MAX} = \max_i\{G_i\};\ \hat{x} = \dfrac{G_{MIN} + G_{MAX}}{2}$
Media de PMC	$\hat{x} = \sum_{i=1}^{n} G_i \big/ m$, donde m es el número de B_i con G_i

Tabla 2.2: Tipos de Concresores – Grupo B - .

A la hora de implementar los algoritmos que realicen dichos métodos de concreción, ya sean los del grupo A o B, es necesario realizar un análisis de los valores *representativos* (*G, W, S* y *H*) de un conjunto difuso:

- **- G - Punto de Máximo Criterio (PMC) o Media de Máximos (MoM)**

El PMC de un conjunto difuso A equivale al valor de $x \in \Omega$ que maximiza su función de pertenencia. En función del número de puntos que maximizan la función y según el tipo de función de pertenencia se definen los siguientes casos sobre la expresión del PMC:

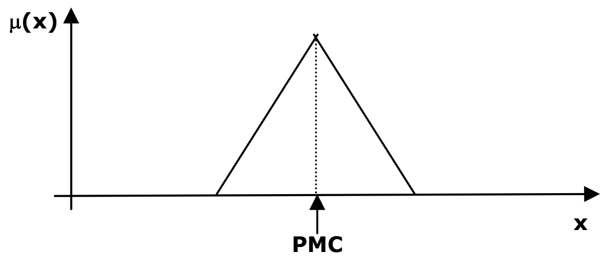


Figura 2.13: PMC único.

- *PMC ÚNICO:* Tomando como ejemplo la función de pertenencia en forma de *Triángulo* (Figura 2.13) puede observarse que existe un único punto que cumple la condición de ser PMC, con lo cual:

$$PMC_{ÚNICO} = \{x_j : A(x_j) = Sup_x A(x)\} \tag{2.23}$$

- *PMC MONO-INTERVALAR:* Tomando como ejemplo la función de pertenencia en forma de *Trapecio* (Figura 2.14) puede observarse que existe un solo intervalo en donde todos su puntos cumplen la condición de ser PMC. El PMC es la media entre los valores extremos de ese intervalo:

$$PMC_{MONO\text{-}INTERVALAR} = (x_1 + x_2)/2 \tag{2.24}$$

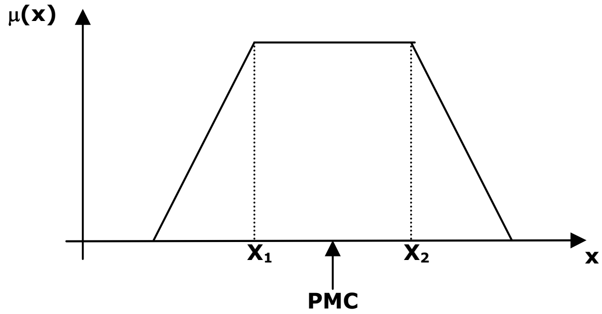


Figura 2.14: PMC en un intervalo.

- *PMC MULTI-INTERVALAR:* Cuando nos encontramos ante un conjunto difuso no convexo - *Trapecio Extendido* (como el de la Figura 2.15), la determinación del PMC se hace algo más compleja y para resolverlo nos basaremos en el concepto de suma de intervalos propuesto por [David92] según el cual:

$$\text{Suma de intervalos} \equiv \sum_{i=1}^{n}\left[x_{ai}, x_{bi}\right] = \left[\sum_{i=1}^{n} x_{ai}, \sum_{i=1}^{n} x_{bi}\right] \tag{2.25}$$

donde $\left[x_{ai}, x_{bi}\right]$ con i=1...n son lo n intervalos que maximizan el conjunto A. Aplicando la media se obtiene:

$$\text{Intervalo Media} \equiv \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_{ai}}{n}, \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{bi}}{n}\right] \tag{2.26}$$

Como el PMC es un valor no un intervalo se procede a obtener la media del intervalo media y así:

$$PMC_{\text{MULTI-INTERVALAR}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{ai} + \sum_{i=1}^{n} x_{bi}}{2 \bullet n} \tag{2.27}$$

Nota: En el caso de que uno de los intervalos corresponda a un solo punto este será expresado en forma de intervalo, así por ejemplo según Figura 2.15, a x_1 le correspondería el intervalo $[x_1, x_1]$.

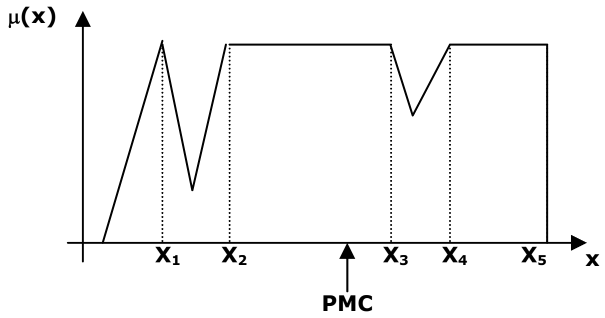


Figura 2.15: PMC en varios intervalos.

- **- W - Centro de Gravedad (CoG)**

El Centro de Gravedad de un conjunto difuso A viene dado por la expresión:

$$CoG(A) = \frac{\int_x x \cdot A(x)dx}{\int_x A(x)dx} \qquad (2.28)$$

Para la obtención del CoG *(Center of Gravity)* por medio de la expresión anterior se ha recurrido a una serie de conceptos que permitan generalizar su determinación independientemente de la expresión de $\mu(x)$ de forma que su función de pertenencia sea una expresión constante a lo largo de la integral.

Considérese el caso genérico de que en conjunto difuso cuya función de pertenencia es la composición de segmentos de forma que ésta viene expresada por una *Función Lineal a trozos* o *Spline* según la Figura 2.16, con n trozos o intervalos representados por los puntos x_0, x_1,... x_n.

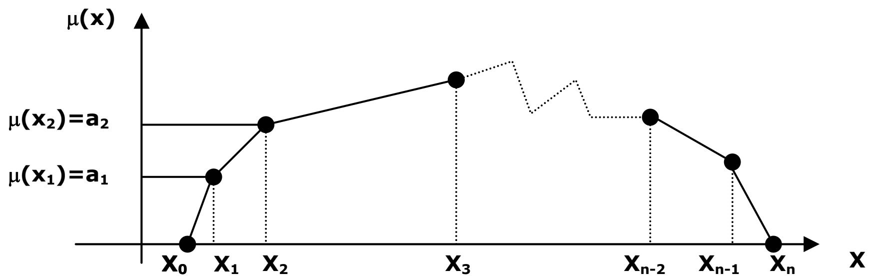


Figura 2.16: Conjunto Difuso genérico o Función Polinómica a trozos (Spline).

Dicho conjunto difuso podría ser expresado de la siguiente forma:

$$\mu(x) = \sum_{i=0}^{n} \mu(x_i) \cdot \rho_i(x) \tag{2.29}$$

donde $\rho_i(x)$ denominada *función Tents* (tiendas, de campaña), equivale a la siguiente expresión, que se representa gráficamente en la Figura 2.17:

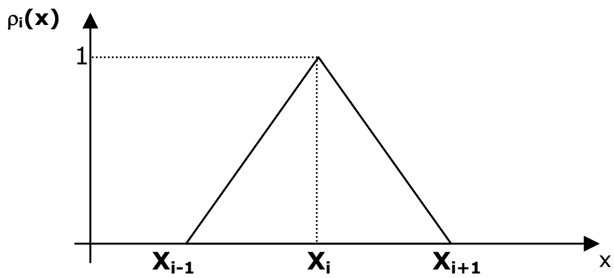


Figura 2.17: Función Tents.

$$\rho_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{(i-1)}}{x_i - x_{(i-1)}} & x \in \left[x_{(i-1)}, x_i\right] \\[2ex] \dfrac{x - x_{(i+1)}}{x_i - x_{(i+1)}} & x \in \left[x_i, x_{(i+1)}\right] \\[2ex] 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{2.30}$$

A través de la Figura 2.18 se ilustra la nueva forma de expresar la función de pertenencia del conjunto difuso por medio de funciones *Tents*:

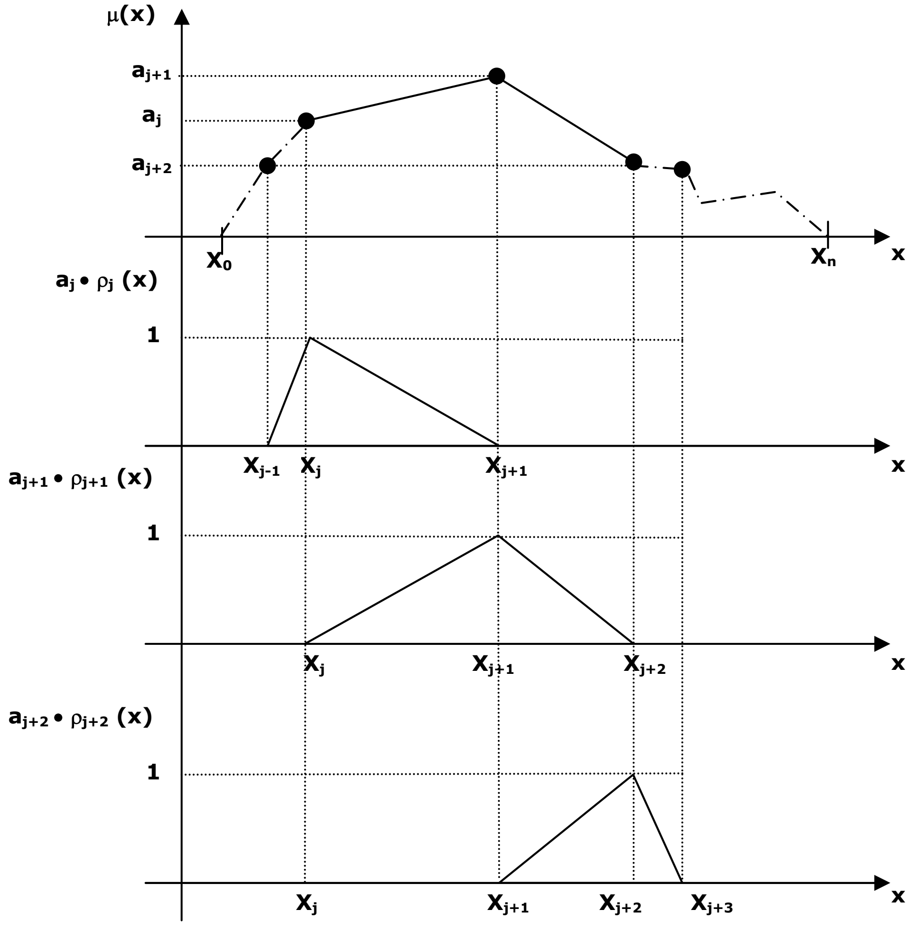


Figura 2.18: Composición de μ(x) a partir de funciones *Tents* ρ_{ii}x).

Como se puede observar del gráfico anterior el desarrollo de la siguiente expresión equivale a:

$$\mu(x) = \sum_{i=0}^{n} \mu(x_i) \cdot \rho_i(x) = \mu(x_0) \cdot \rho_0(x) + \ldots + \mu(x_j) \cdot \rho_j(x) + \ldots + \mu(x_n) \cdot \rho_n(x)$$

(2.31)

donde $\mu(x_i) = a_i$. Como $a_0 = a_n = 0$ se obtiene la simplificación de la expresión anterior en el primer y último término de forma que:

$$\mu(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \mu(x_i) \cdot \rho_i(x) = a_1 \cdot \rho_1(x) + \ldots + a_j \cdot \rho_j(x) + \ldots + a_{n-1} \cdot \rho_{n-1}(x) \tag{2.32}$$

Basándonos en la expresión anterior se determinará primero el denominador de la expresión para calcular el CoG, es decir, el área del conjunto difuso:

$$\int_x \mu(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} \mu(x)dx = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\mu(x_i) \cdot \underbrace{\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \rho_i(x)dx}_{\text{Área F.Tents } \rho_i(x)} \right) \tag{2.33}$$

Ahora calculamos el área de las funciones tents:

$$\text{Area } \rho_i(x) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} dx = \left\{ \begin{array}{c} \text{Area de un Triángulo} \\ \text{Base} = x_{i+1} - x_{i-1} \\ \text{Altura} = 1 \end{array} \right\} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2} \tag{2.34}$$

Finalizando, se obtendría como expresión para el área del conjunto difuso:

$$\int_x \mu(x)dx = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\mu(x_i) \cdot \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2} \right) \tag{2.35}$$

La expresión para el numerador vendrá dada por:

$$\int_x x \cdot \mu(x)dx = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\mu(x_i) \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} x \cdot \rho_i(x)dx \right) \tag{2.36}$$

Desarrollando la expresión integral se obtiene:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} x \cdot \rho_i(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} x \cdot \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} x \cdot \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} dx = \frac{X_{i+1}^2 - X_{i-1}^2 + X_i X_{i+1} - X_i X_{i-1}}{6} \quad (2.37)$$

Aplicando el desarrollo de la expresión integral en el numerador (Ecuación 2.36) se obtiene:

$$\int x \cdot \mu(x)dx = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\mu(x_i) \cdot \left[\frac{x_{i+1}^2 - x_{i-1}^2 + x_i x_{i+1} - x_i x_{i-1}}{6} \right] \right) \quad (2.38)$$

Con la anterior, se obtiene como expresión del CoG la siguiente:

$$W_{\text{TRAPECIO EXTENDIDO}} = \frac{\int_X x \cdot \mu(x)dx}{\int_X \mu(x)dx} = \sum_{i=1}^{n-1} \mu(x_i) \left(\frac{x_{i+1}^2 - x_{i-1}^2 + x_i x_{i+1} - x_i x_{i-1}}{3(x_{i+1} - x_{i-1})} \right) \quad (2.39)$$

Si se toma como caso particular un conjunto difuso *Trapezoidal* (como el de la Figura 2.19) la expresión del CoG queda simplificada en:

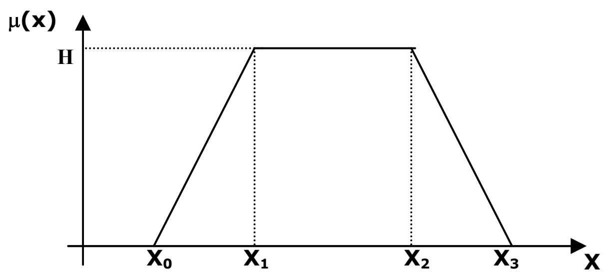


Figura 2.19: Representación gráfica de un conjunto difuso trapezoidal.

$$W_{TRAPECIO} = \frac{H\dfrac{X_3^2 + X_2^2 - X_1^2 - X_0^2 + X_3X_2 - X_1X_0}{6}}{H\dfrac{X_3 + X_2 - X_1 - X_0}{2}} = \frac{X_3^2 + X_2^2 - X_1^2 - X_0^2 + X_3X_2 - X_1X_0}{3(X_3 + X_2 - X_1 - X_0)}$$

(2.40)

- **- S - Área**

El *área* de un conjunto difuso A viene dada por la expresión obtenida anteriormente en el CoG de forma que:

$$\int_X \mu(x)dx = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\mu(x_i) \cdot \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2}\right)$$

(2.41)

- **- H - Altura**

La *altura* de un conjunto difuso A viene dada por la expresión:

$$\text{Altura}\,(A) = \sup_{x \in \Omega} \mu_A(x)$$

(2.42)

siendo Ω el universo de discurso del conjunto difuso A. Como suponemos que A es un trapecio extendido:

$$\text{Altura}(A) = \text{Sup}\{\mu_A(x_i) \,/\, x_i \in \{1,\ldots,n-1\}\}$$

(2.43)

2.4 Métodos de Ajuste para Controladores Difusos

Los controladores difusos contienen un conjunto de parámetros que pueden verse alterados para modificar el funcionamiento del controlador. Estos son los siguientes:

- **Factor de Escala** (FE)**:** Las entradas y salidas del controlador pueden escalarse variando los límites de su universo de discurso y modificando proporcionalmente las etiquetas.

    - Normalmente las etiquetas se definen en el intervalo [–1,1] y luego se escala al intervalo deseado.

    - En el caso de variables de entrada, lo que se hace es multiplicar el valor de entrada por un *valor de escala* en el intervalo [0,1], para escalar la entrada de su intervalo real al intervalo [–1,1].

  Ejemplo 2.3: Supongamos las etiquetas de la Figura 2.20, donde el intervalo real de la entrada es [–200,200]. Se debería multiplicar el valor de entrada por 0.005 (1/200): El valor 100 se clasifica principalmente como PM, ya que 100·0.005 = 0.5. Si ahora escalamos a un intervalo el doble de grande, [–400,400] debemos multiplicar por 0.0025 (1/400): El valor 100 se clasifica ahora principalmente como PS, ya que 100·0.0025 = 0.25.

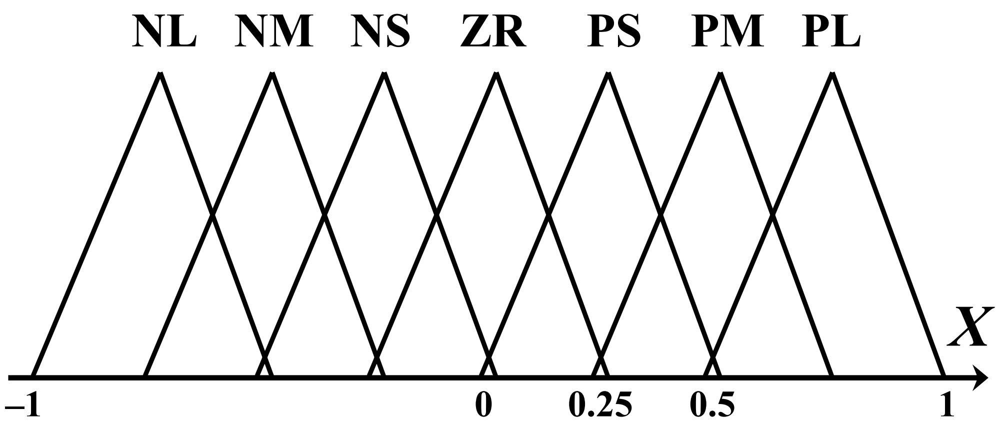
- **Modificación de los Conjuntos Difusos:** Se trata de modificar la definición de las etiquetas lingüísticas.

    - Mientras que el cambio en el *Factor de Escala* consigue una alteración uniforme en todo el universo, con este tipo de cambio podemos aumentar la sensibilidad (ganancia) del controlador para valores de cierta zona del universo.

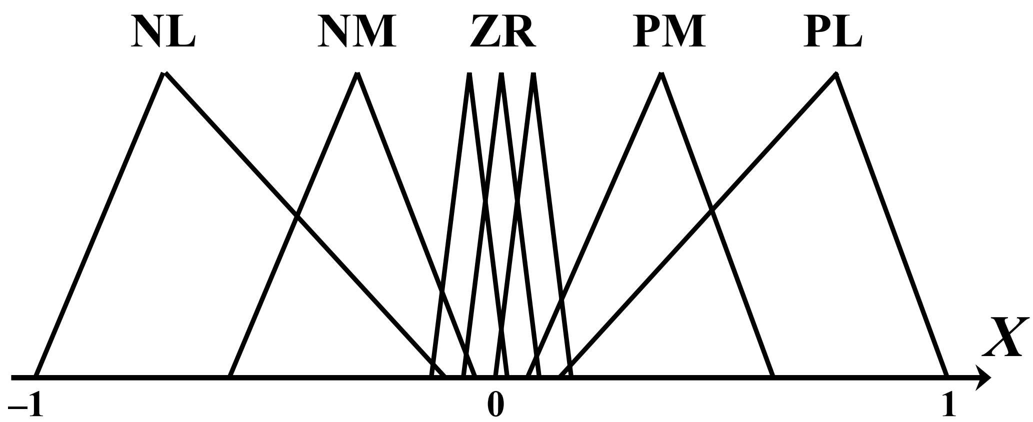
    - Esta modificación debe hacerse con cuidado pues las definiciones de las etiquetas no deben ser arbitrarias y modificarlas demasiado puede suponer perder el significado lingüístico subyacente.

    - Se han utilizado *algoritmos genéticos* para la modificación de los conjuntos difusos [Herrera93].

  Ejemplo 2.4: Siguiendo con el ejemplo anterior, queremos ahora incrementar la sensibilidad del controlador en los valores cercanos al cero (valores centrales de universo de discurso). Esta modificación puede verse en la Figura 2.21



Ejemplo 2.20: Variable lingüística con universo de discurso [-1, 1] y siete etiquetas.



Ejemplo 2.21: Aumento de la sensibilidad del controlador en los valores cercanos al cero.

- **Modificación de las Reglas de la Base de Conocimiento:** Se trata de modificar el contenido de las reglas. Los controladores que realizan ésta función se denominan *Controladores Autoorganizativos*. Esto se basa en lo siguiente:

    - Una regla puede no ser siempre aplicable, de la misma forma.
    - A veces es preciso modificarla para adaptarse a la situación cambiante del sistema.
    - En ocasiones, una solución a este problema consiste en añadir una nueva variable de entrada al controlador y añadir nuevas condiciones en el antecedente de algunas reglas, basadas en la nueva variable.

- Existen muchas formas de modificar una regla. Por ejemplo, modificar la etiqueta lingüística de alguna variable (del antecedente o del consecuente de la regla).

Ejemplo 2.5: Si Humedad es GRANDE, ENTONCES Apertura_Riego es POCO. Podría convertirse en la siguiente regla (si, por ejemplo fuese verano) y entonces Si Humedad es GRANDE, ENTONCES Apertura_Riego es MODERADA.

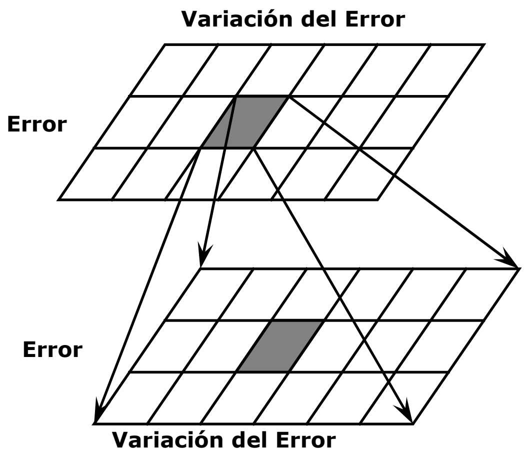


Figura 2.22: Efecto Ventana.

- **Efecto Ventana** (Windowing Effect)**:** Cuando la salida de un sistema de control difuso está en cierto rango, entonces se puede cambiar el banco de reglas para conseguir mayor especificidad.

  - Normalmente la salida que se usa en este caso es una medida del *error* y/o de la *variación del error*. Así, si el error es suficientemente pequeño, se intenta minimizar aún más con otro conjunto de reglas distinto.

  - Esto se puede aplicar sucesivamente en varias etapas, haciendo que cada etapa sea más fina y minuciosa, es lo que se denomina *Control Multirresolución* (véase Figura 2.22).

2.5 Tipos de Controladores Difusos

Atendiendo al modo de operar de los controladores difusos pueden distinguirse varios tipos. A continuación se exponen según [Cerezo00]:

- **Controladores Difusos Directos**: Por lo general, las características del controlador se establecen por la naturaleza de las variables de entrada y salida utilizada. El controlador detecta la señal de error (e), que por lo general, está en un nivel de potencia muy bajo, y la amplifica a un nivel lo suficientemente alto. La salida de un controlador se alimenta a un actuador (u), es un dispositivo de potencia que produce la entrada para la planta de acuerdo con la señal de control, a fin de que la señal de salida se aproxime a la señal de entrada de referencia (Figura 2.1).

- **Controladores Difusos Adaptativos:** La mayoría de los procesos industriales son por naturaleza no lineales, de forma que los valores que adoptan sus parámetros cambian conforme varia el punto de operación a través del tiempo. El controlador clásico necesitaría un reajuste continuo.

  Esta necesidad de reajuste ha dado paso a la idea de diseñar controladores adaptativos que puedan reajustarse automáticamente para hacer frente a las nuevas características del proceso. Los controladores difusos son no lineales y son firmes candidatos para cubrir el hueco dejado por los controladores clásicos. De este modo, pueden hacer frente a cierto número de procesos con una no-linealidad implícita.

  Los controladores adaptativos contienen dos componentes extra que no se incluyen en el controlador estándar. El primero de ellos es el denominado *"monitor del proceso"* que es el encargado de detectar los cambios en las características del proceso y puede presentarse como una medida de rendimiento reflejando la bondad de la actuación del controlador o bien a través de un parámetro estimador que actualice constantemente un modelo del proceso. El segundo componente es el mecanismo de adaptación en sí que utiliza la información del monitor del proceso para actualizar los parámetros del controlador de forma que se adapte a la situación cambiante del proceso (véase sección 2.2.2). Los que varían el *Factor de Escala* y los *Conjuntos Difusos* se denominan *Controladores Autoajustables* y los que modifican las *Reglas de la Base de Conocimiento* se denominan *Controladores Auto-Organizados*.

- **Controladores Difusos Auto-Organizados *(SOC - Self-Organising Controller)*:** Es un sistema capaz de modificar automáticamente y sin intervención humana su base de conocimiento. A partir de las discrepancias con respecto a unos determinados criterios prefijados, el control auto-organizado establece las oportunas modificaciones en la base de reglas. Los elementos que constituyen el SOC son los siguientes (Figura 2.23):

- El controlador lingüístico.
- El algoritmo modificador de reglas.
- El evaluador de características.
- El modelo de referencia.

De la respuesta del evaluador de características y el modelo se obtiene la corrección necesaria en la actuación. Los auto-organizados pueden partir sin reglas para aprenderlas.

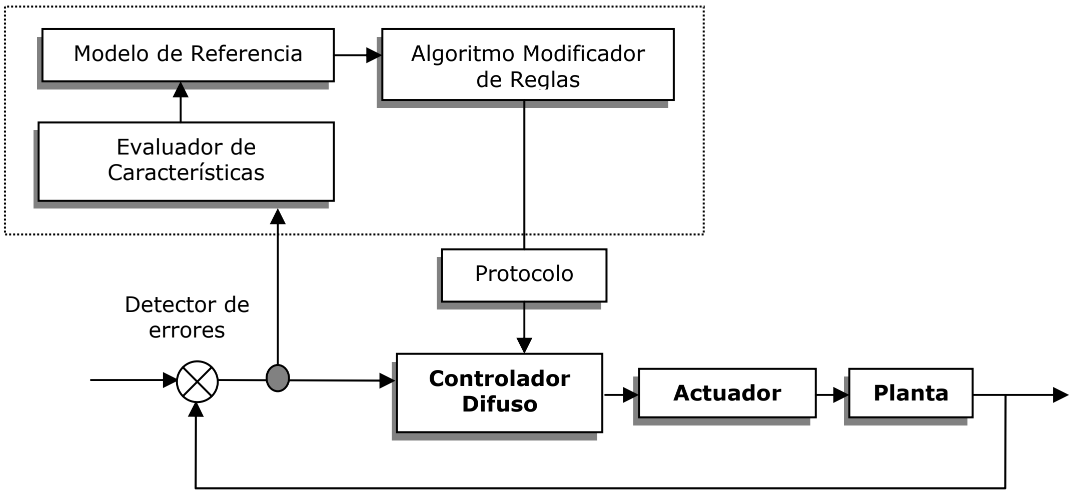


Figura 2.23: Diagrama de Bloques de Controlador Difuso Auto-Organizado.

- **Controladores Difusos con Auto-Aprendizaje:** Se encuentra entre una de las técnicas más recientes referentes a control difuso. En su mayor parte responden a procedimientos y técnicas de aprendizaje del tipo gradiente descendente. En [Nomura91] proponen un método de aprendizaje por propagación hacia atrás, que opera sobre un conjunto de reglas del tipo:

  Regla i: Si X_1 es A_1 y ... X_n es A_n entonces Y es W_1.

  En donde A_i está representado por un conjunto borroso de forma triángular, definido por su centro, c_i y su ancho a_i. Los consecuentes w_i son escalares.

- **Controladores basados en modelos borrosos. Control Predictivo:** Otra alternativa de gran interés son los controladores basados en modelos borrosos del proceso a controlar. La aplicación de las técnicas de modelado precisan una serie de simplificaciones sobre los parámetros relativos a antecedentes y consecuentes [Ichicashi91]. los sistemas de control basados en modelos borrosos actúan como modeladores de la dinámica inversa del proceso.

- **Controladores Difusos Híbridos:** Se denominan así a aquellos sistemas de control formados por dos controladores interconectados, de los cuales uno es convencional (como los PID), y otro es difuso. El primero se encarga básicamente del control garantizando un comportamiento estable.

El controlador difuso actúa en paralelo, introduciendo el componente heurístico en el proceso. Usualmente sus acciones se orientan a la mejora de ciertas características, como reducción de oscilaciones, mejoras del tiempo de establecimiento, etc.

Su mayor presencia es, sin duda, a escala industrial, Una buena parte de los controladores difusos industriales han sido realizados mediante esta técnica de hibridación. Un ejemplo se tiene en el regulador de temperatura E5_F de OMROM. Se trata de una regulador PID hibridado con un autoajuste difuso que permite calcular las constantes PID óptimas para el objeto controlado (Figura 2.24) y las características de la función de ajuste *fuzzy* (Figura 2.25).

OMRON

CONTROLADOR DE TEMPERATURA	E5_J

Controlador de temperatura con algoritmo de control 2–PID y ajuste Self–tuning

- Dimensiones DIN:
  96 x 96 mm (E5AJ), 48 x 48 mm (E5CJ)
  48 x 96 mm (E5EJ)
- Self–tuning mediante lógica borrosa que optimiza el control de temperatura.
- Selecciones mínimas por parte del usuario.
- Doble punto de consigna, seleccionable por entrada externa.
- Operación MARCHA/PARO (E5AJ/E5EJ) por entrada externa.
- Protección del panel frontal conforme IP54 en E5AJ/E5EJ e IP66/NEMA4 con cubierta opcional.
- Modelos con comunicaciones serie (E5AJ/E5EJ).
- Salidas a relé, tensión o analógica: 4-20 mA (12 bits)

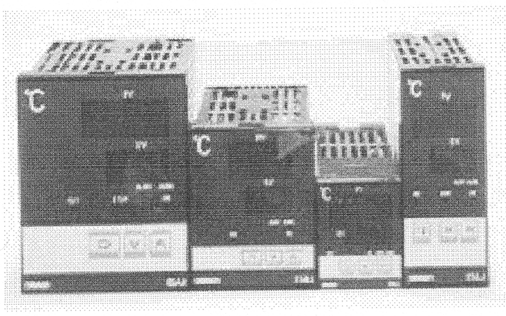


Figura 2.24: Controlador de temperatura E5_J – Omron.

Estrategias de este tipo son muy adecuadas desde una visión puramente industrial: al disponer de un control clásico, el técnico de proceso se siente apoyado por su propia experiencia, y a su vez, se adapta a los nuevos planteamientos introducidos por el controlador difuso.

■ Autoajuste fuzzy o self–tuning

El autoajuste fuzzy es una función que permite al E5□J calcular las constantes PID óptimas para el objeto controlado.

Características

- El E5□J determina por sí mismo cuando se ha de realizar el autoajuste fuzzy.
- En el momento del autoajuste fuzzy, el E5□J no envía ninguna señal que perturbe la temperatura o el valor de salida.

Función de autoajuste Fuzzy

La función de autoajuste fuzzy tiene tres modos de funcionamiento.

En modo SRT (modo de respuesta de paso), las constantes PID se ajustan en el momento de cambiar el punto de consigna.

En modo DT (ajuste de perturbación), se analizará el overshooting producido y el tiempo de recuperación de la estabilidad del sistema, ajustándose convenientemente las constantes PID.

En modo HT (ajuste de oscilación), cuando se producen oscilaciones, las constantes PID se optimizan.

Condiciones de arranque de SRT

SRT arrancará automáticamente si se dan las siguientes condiciones cuando se cambia el punto de consigna o se conecta el E5□J:

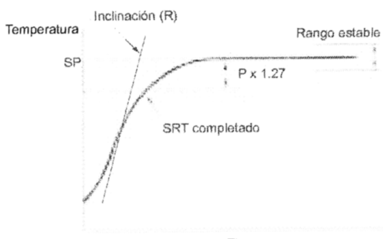
1. El nuevo punto de consigna es diferente del punto de consigna utilizado la última vez que se ejecutó SRT.
2. La diferencia entre el nuevo y el antiguo punto de consigna es mayor que el valor obtenido del siguiente cálculo: valor de banda proporcional actual (P) x aproximadamente 1.27+4. (Cuando el E5□J se conecta, la diferencia entre el valor del proceso y el punto de consigna se toma como el rango de cambio de punto de consigna.)
3. La temperatura es estable antes de cambiar el punto de consigna o la temperatura está equilibrada mientras el E5AJ es conectado antes de obtenerse ninguna salida.
4. El punto de consigna se cambia en la dirección en que aumenta la cantidad controlada (es decir, la cantidad de control está en la dirección superior en operación inversa y en la dirección inferior en operación normal).

En los siguientes casos, SRT no se ejecutará con precisión. Por lo tanto el E5□J se ajustará en modo DT o HT.

1. La inclinación de temperatura máxima (R) no es obtenida antes de que el valor del proceso alcance el valor obtenido del siguiente cálculo: valor de banda proporcional presente (P) x aproximadamente 1.27 (es decir, la inclinación de temperatura máxima (R) se obtiene antes de que finalice el SRT). Si la banda proporcional, obtenida antes de que finalice SRT, es mayor que la banda proporcional previa, sin embargo, las constantes PID serán refrescadas de cara a optimizar el proceso.
2. El punto de consigna se cambia durante SRT y se satisfacen las condiciones de finalización de SRT, en cuyo caso no se refrescarán las constantes PID.

Estado de temperatura estable

Si la temperatura está dentro de un rango estable para un periodo especificado, se considera que la temperatura es estable.

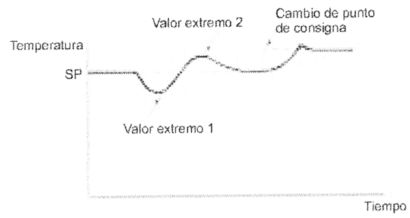


Estado balanceado

Si el valor del proceso está dentro del rango estable durante 60 segundos cuando no hay salida, se considera que la temperatura está equilibrada.

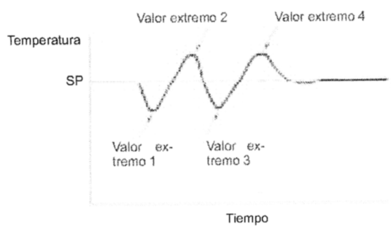
Condiciones de arranque de DT

1. DT arrancará si la temperatura que ha sido estable varía debido a perturbaciones externas y la desviación de la temperatura excede el rango estable, cuya selección por defecto es 15°C y luego la temperatura se estabiliza, suponiendo que el número de valores extremos de temperatura es inferior a cuatro.
2. DT arrancará si se cambia el punto de consigna bajo la condición de que SRT no arranca y la temperatura se estabiliza, suponiendo que el número de valores extremos de temperatura es inferior a cuatro.
   Si hay cuatro o más valores de temperatura máxima, arrancará HT.



Condiciones de arranque de HT

HT estará en ON cuando hay oscilaciones con cuatro o más valores de temperatura máxima (valores extremos) mientras SRT no se está ejecutando.



Nota: En aplicaciones específicas donde la temperatura varía periódicamente debido a perturbaciones, hay que ajustar los parámetros internos. Para más información consultar *"E5□J Manual de Operación"*.

Figura 2.25: Función de autoajuste difusa en E5_J.