Pepe Gallardo – Universidad de Málaga

Temario

Bibliografía

✓ *Razonando con Haskell. Un curso sobre programación funcional.* Blas Ruiz, Francisco Gutiérrez, Pablo Guerrero y José Gallardo. Thomson, 2004. (`http://www.lcc.uma.es/RazonandoConHaskell`)

✓ *Introduction to Functional Programming using Haskell.* Richard Bird. Prentice Hall, 1998.

✓ *The Haskell School of Expression. Learning Functional Programming through multimedia.* Paul Hudak. Cambridge University Press, 2000.

✓ *Haskell. The Craft of Functional Programming.* Simon Thompson. Addison-Wesley, 1999.

Profesor

Pepe Gallardo.

Despacho 3.2.50.

`pepeg@lcc.uma.es`

Web asignatura

`http://www.lcc.uma.es/~pepeg/mates`

Tema 1. Introducción y semántica operacional

1.1 Programación Funcional

- ✓ *Programar*: especificar cómo resolver un problema.
- ✓ Un modo natural de describir programas es mediante funciones.
- ✓ El estilo funcional está basado en expresiones:
  - ◇ Un programa es un conjunto de definiciones de *funciones matemáticas*
  - ◇ El programador define funciones
  - ◇ El ordenador evalúa la expresión
- ✓ Ventajas:
  - ◇ Permite escribir programas claros, concisos y con alto nivel de abstracción
  - ◇ Soporta *Software* reusable
  - ◇ Facilita el uso de la verificación formal

Usaremos *Haskell 98*

`http://haskell.org`

1.2 El lenguaje Haskell

Haskell es un lenguaje funcional

- ✓ Puro:
  - ◇ Una misma expresión denota siempre el mismo valor (*Transparencia referencial*).
  - ◇ Verificación formal relativamente fácil.
- ✓ No estricto:
  - ◇ El orden utilizado para reducir expresiones es normal.
  - ◇ Las implementaciones de Haskell suelen usar *evaluación perezosa*.
  - ◇ Permite trabajar con estructuras infinitas.
- ✓ Fuertemente tipado:
  - ◇ Cada elemento tiene un *tipo*.
  - ◇ Se usa para comprobar el uso consistente de los elementos.
  - ◇ Usos inconsistentes dan lugar a errores de tipo.
  - ◇ Muchos errores se detectan pronto.

1.3 La notación Currificada

Aplicación de funciones

- ✓ En *Matemáticas* la aplicación de funciones es denotada usando paréntesis:

  $f\ (a, b)\ +\ c\ \times\ d$ aplicar la función f a los argumentos a y b

- ✓ En *Haskell* la aplicación de funciones es denotada usando espacios (notación *currificada*):

  $f\ a\ b\ +\ c * d$ aplicar la función f a los argumentos a y b

- ✓ En *Haskell* la aplicación de funciones tiene prioridad máxima:

  $g\ a\ +\ b$ significa $(g\ a) + b$ y NO $g\ (a + b)$

- ✓ En *Haskell* los argumentos compuestos van entre paréntesis:

  $f\ (a\ +\ b)\ c$ aplicar la función f a dos args: $(a + b)$ y c

Ejemplos:

Matemáticas	Haskell
$g\,(x)$	$g\ x$
$f\,(x, y)$	$f\ x\ y$
$g\,(f\,(x, y))$	$g\,(f\ x\ y)$
$f\,(x, g\,(y))$	$f\ x\ (g\ y)$
$g\,(x + y)$	$g\,(x + y)$
$g\,(x) + y$	$g\ x + y$

Definición de funciones

✓ Se usa también la notación *currificada*:

$$
\begin{array}{lll}
\multicolumn{3}{l}{\text{-- Un comentario}} \\
g & :: & Integer \to Integer \\
g\ x & = & x + 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
f & :: & Integer \to Integer \to Integer \\
f\ x\ y & = & x + y + 2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
doble & :: & Integer \to Integer \\
doble\ x & = & x + x
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
cuadruple & :: & Integer \to Integer \\
cuadruple\ x & = & doble\ (doble\ x)
\end{array}
$$

Significado:

$$\overbrace{f}^{nombre\ fun} \qquad \overbrace{::}^{tiene\ tipo}\ \overbrace{Integer}^{Tipo\ Arg\ 1^0} \to \overbrace{Integer}^{Tipo\ Arg\ 2^0} \to \overbrace{Integer}^{Tipo\ Res}$$

$$\underbrace{f}_{nombre\ fun}\ \underbrace{x}_{par.\ 1^0}\ \underbrace{y}_{par.\ 2^0}\ \underbrace{=}_{se\ define}\ \underbrace{x+y+2}_{resultado}$$

✓ Nombres de función: comienzan por minúscula

$f \qquad f' \qquad fun3 \qquad fun\_3$

✓ Nombres de parámetros: comienzan por minúscula

$x \qquad y \qquad x' \qquad x1 \qquad xs$

✓ Nombres de tipos: comienzan por mayúscula

$Integer \qquad Bool \qquad Char$

1.4 Sesiones y declaraciones

El ordenador funciona como una calculadora o *evaluador*:

?

Valores numéricos enteros:

? $1 + 2$
$3 \;::\; \mathit{Integer}$

Valores reales:

? $cos\ pi$
$-1.0 \;::\; \mathit{Double}$

Solo los argumentos compuestos van entre paréntesis:

? $cos\ (2 * pi)$
$1.0 \;::\; \mathit{Double}$

Ejemplo más elaborado:

? $[1..5]$
$[1, 2, 3, 4, 5] \;::\; [\mathit{Integer}]$

? $sum\ [1..10]$
$55 \;::\; \mathit{Integer}$

Sesiones y declaraciones (2)

Funciones de más de un argumento:

$$
\begin{array}{l}
\textbf{?}\ mod\ 10\ 3 \\
1\ :: \ Integer
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\textbf{?}\ mod\ 10\ (3+1) \\
2\ :: \ Integer
\end{array}
$$

- ✓ Haskell proporciona un rico conjunto de elementos predefinidos
- ✓ Este conjunto es extensible: el programador puede definir nuevas funciones, operadores y tipos de datos.

Ejemplo. función que calcula el sucesor de un número entero:

$$
\begin{array}{lcl}
sucesor & :: & Integer \rightarrow Integer \\
sucesor\ x & = & x + 1
\end{array}
$$

Tras proporcionar la declaración de función anterior al evaluador:

$$
\begin{array}{l}
\textbf{?}\ sucesor\ 3 \\
4\ :: \ Integer
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\textbf{?}\ 10 * sucesor\ 3 \\
40\ :: \ Integer
\end{array}
$$

Una función de dos argumentos:

$$
\begin{array}{lcl}
sumaCuadrados & :: & Integer \rightarrow Integer \rightarrow Integer \\
sumaCuadrados\ x\ y & = & x * x + y * y
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\textbf{?}\ sumaCuadrados\ 2\ (sucesor\ 3) \\
20\ :: \ Integer
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\textbf{?}\ sumaCuadrados\ (2+2)\ 3 \\
25\ :: \ Integer
\end{array}
$$

1.5 Reducción de expresiones

El evaluador calcula el resultado de una expresión utilizando las definiciones de las funciones involucradas.

Ejemplo

$$
\begin{array}{lcl}
\mathit{cuadrado} & :: & \mathit{Integer} \to \mathit{Integer} \\
\mathit{cuadrado}\ x & = & x\ *\ x
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
 & 2 + \underline{\mathit{cuadrado}\ 3} \\
\Longrightarrow & \{\text{por la definición de } \mathit{cuadrado}\} \\
 & 2 + (\underline{3 * 3}) \\
\Longrightarrow & \{\text{por el operador } (*)\} \\
 & \underline{2 + 9} \\
\Longrightarrow & \{\text{por el operador } (+)\} \\
 & 11
\end{array}
$$

✓ Cada uno de los pasos efectuados es una *reducción*.

✓ En cada reducción, el evaluador busca una parte de la expresión que sea simplificable (*redex* o *reducto*) y la simplifica.

✓ Cuando una expresión no puede ser reducida más se dice que está en *forma normal*.

✓ Labor del ordenador: buscar un *redex* en la expresión, *reducirlo* y repetir este proceso hasta que la expresión esté en *forma normal*.

Reducción desde dentro hacia fuera

La definición del comportamiento del evaluador dada es *ambigua*.

¿Qué pasa cuando hay más de un *redex*?

Podemos reducir la expresión desde dentro hacia fuera (reducir primero aquellos reductos más anidados).

$$\begin{array}{lcl} cuadrado & :: & Integer \rightarrow Integer \\ cuadrado\ x & = & x\ *\ x \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\quad cuadrado(\underline{cuadrado\ 3}) \\
\Longrightarrow \{\text{por la definición de } cuadrado\} \\
\quad cuadrado(\underline{3 * 3}) \\
\Longrightarrow \{\text{por el operador } (*)\} \\
\quad \underline{cuadrado\ 9} \\
\Longrightarrow \{\text{por la definición de } cuadrado\} \\
\quad \underline{9 * 9} \\
\Longrightarrow \{\text{por el operador } (*)\} \\
\quad 81
\end{array}$$

Esta estrategia presenta problemas.

Reducción desde fuera hacia dentro

Reducir la expresión desde fuera hacia dentro (reducir primero los reductos menos anidados).

La definición de la función $cuadrado$

$$
\begin{array}{lcl}
cuadrado & :: & Integer \rightarrow Integer \\
cuadrado\ x & = & x \ * \ x
\end{array}
$$

puede ser vista como una *regla de reescritura*:

$$cuadrado\ \boxed{x} \Longrightarrow \boxed{x} * \boxed{x}$$

Se pasan los argumentos a las funciones como expresiones sin reducir, no como valores.

$$
\begin{array}{l}
\quad \underline{cuadrado(cuadrado\ 3)} \\
\Longrightarrow \{\text{por la definición de } cuadrado\} \\
\quad \underline{(cuadrado\ 3)}\ *\ (cuadrado\ 3) \\
\Longrightarrow \{\text{por la definición de } cuadrado\} \\
\quad (\underline{3\ *\ 3})\ *\ (cuadrado\ 3) \\
\Longrightarrow \{\text{por la definición de } (*)\} \\
\quad 9\ *\ (\underline{cuadrado\ 3}) \\
\Longrightarrow \{\text{por la definición de } cuadrado\} \\
\quad 9\ *\ (\underline{3\ *\ 3}) \\
\Longrightarrow \{\text{por el operador } (*)\} \\
\quad \underline{9\ *\ 9} \\
\Longrightarrow \{\text{por el operador } (*)\} \\
\quad 81
\end{array}
$$

Observación: los operadores aritméticos son *estrictos*.

Importancia de la estrategia de reducción

Transparencia referencial: una misma expresión denota siempre el mismo valor.

Consecuencia:

✓ Sea cual sea la estrategia seguida en las reducciones, el resultado final (el valor 81) coincide (si se alcanza).

✓ La elección de un *redex* equivocado puede hacer que no se obtenga la forma normal de una expresión.

Ejemplo:

$$\begin{array}{lcl} \mathit{infinito} & :: & \mathit{Integer} \\ \mathit{infinito} & = & 1 + \mathit{infinito} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \mathit{cero} & :: & \mathit{Integer} \rightarrow \mathit{Integer} \\ \mathit{cero}\ x & = & 0 \end{array}$$

Comportamiento esperado $\forall\, n :: \mathit{Integer}\ .\ \mathit{cero}\ n \Longrightarrow 0$.

Si reducimos siempre el *redex* más interno:

$\mathit{cero}\ \underline{infinito}$

$\Longrightarrow$ {por definición de $\mathit{infinito}$}

$\mathit{cero}\ (1 + \underline{infinito})$

$\Longrightarrow$ {por definición de $\mathit{infinito}$}

$\mathit{cero}\ (1 + (1 + \underline{infinito}))$

$\Longrightarrow$ {por definición de $\mathit{infinito}$}

...

Si reducimos el *redex* más externo:

$\underline{cero\ infinito}$

$\Longrightarrow$ {por definición de cero}

0

La estrategia utilizada para seleccionar el *redex* es crucial, ya que puede hacer que se obtenga o no la forma normal de la expresión.

Orden de reducción aplicativo

- ✓ Seleccionar en cada reducción el *redex* más interno (el más anidado).
- ✓ En caso de que existan varios reductos que cumplan la condición anterior, se selecciona el que aparece más a la izquierda en la expresión.

Esto significa que

- ✓ Ante una aplicación de función, se reducen primero los argumentos de la función para obtener sus correspondientes valores (*paso de parámetros por valor*).

A los evaluadores que utilizan este orden se los llama *estrictos* o *impacientes*.

Problemas:

- ✓ A veces, se efectúan reducciones que no son necesarias:

$$
\begin{array}{l}
\quad cero\ (\underline{10 * 4}) \\
\Longrightarrow \{\text{por el operador } (*)\} \\
\quad \underline{cero\ 40} \\
\Longrightarrow \{\text{por definición de } cero\} \\
\quad 0
\end{array}
$$

- ✓ No encuentra la forma normal de ciertas expresiones:

$$
\begin{array}{l}
\quad cero\ \underline{infinito} \\
\Longrightarrow \{\text{por definición de } infinito\} \\
\quad cero\ (1 + \underline{infinito}) \\
\Longrightarrow \{\text{por definición de } infinito\} \\
\quad cero\ (1 + (1 + \underline{infinito})) \\
\Longrightarrow \{\text{por definición de } infinito\} \\
\quad \ldots
\end{array}
$$

Orden de reducción normal

✓ Seleccionar el *redex* más externo (menos anidado)

✓ En caso de conflicto, de entre los más externos el que aparece más a la izquierda de la expresión.

Esto significa que

✓ Se pasan como argumentos expresiones sin evaluar necesariamente (*paso de parámetros por nombre*)

A los evaluadores que utilizan este orden se los llama *no estrictos*.

Ventajas:

✓ Es *normalizante*: si la expresión tiene forma normal, una reducción mediante este orden la alcanza. (*Teorema de estandarización*).

✓ Un evaluador no estricto solo reducirá aquellos reductos que son necesarios para calcular el resultado final.

Problema:

✓ La reducción de los argumentos puede repetirse (menor eficiencia).

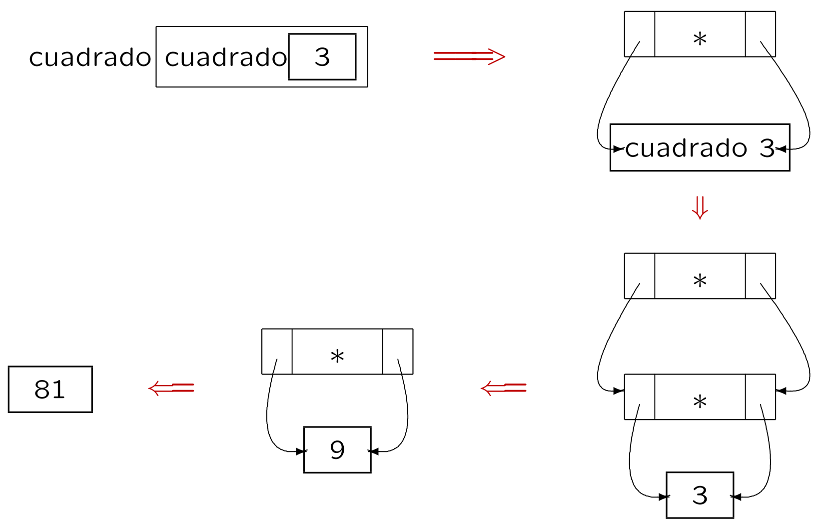
$$
\begin{array}{l}
\quad \underline{cuadrado(cuadrado\ 3)} \\
\Longrightarrow \{\text{por la definición de } cuadrado\} \\
\quad \underline{(cuadrado\ 3)} * (cuadrado\ 3) \\
\Longrightarrow \{\text{por la definición de } cuadrado\} \\
\quad (\underline{3 * 3}) * (cuadrado\ 3) \\
\Longrightarrow \{\text{por la definición de } (*)\} \\
\quad 9 * (\underline{cuadrado\ 3}) \\
\Longrightarrow \{\text{por la definición de } cuadrado\} \\
\quad 9 * (\underline{3 * 3}) \\
\Longrightarrow \{\text{por el operador } (*)\} \\
\quad \underline{9 * 9} \\
\Longrightarrow \{\text{por el operador } (*)\} \\
\quad 81
\end{array}
$$

Evaluación Perezosa

La *Evaluación perezosa* soluciona este problema.

Evaluación perezosa = *paso por nombre* + recordar los valores de los argumentos ya calculados (evita que el cálculo se repita)

Cada expresión se representa mediante un *grafo*.



La reducción de la figura la escribiremos como:

$$\underline{cuadrado\ (cuadrado\ 3)}$$
$\Longrightarrow$ {por la definición de $cuadrado$}
$$a * a \ \textbf{donde}\ a = \underline{cuadrado\ 3}$$
$\Longrightarrow$ {por la definición de $cuadrado$}
$$a * a \ \textbf{donde}\ a = \underline{b * b}\ \textbf{donde}\ b = 3$$
$\Longrightarrow$ {por el operador $(*)$}
$$\underline{a * a}\ \textbf{donde}\ a = 9$$
$\Longrightarrow$ {por el operador $(*)$}
$$81$$

No se realizarán más reducciones que utilizando *paso por valor*.

Posee las ventajas del *paso por nombre* y no es menos eficiente que el *paso por valor*.

Objetivos del tema

El alumno debe:

- ✓ Conocer las bases del estilo de programación funcional
- ✓ Conocer las principales características de Haskell
- ✓ Conocer la notación currificada de Haskell
- ✓ Conocer los principales órdenes de reducción: aplicativo y normal
- ✓ Conocer las principales ventajas e inconvenientes de cada orden de reducción
- ✓ Saber reducir expresiones utilizando los distintos órdenes