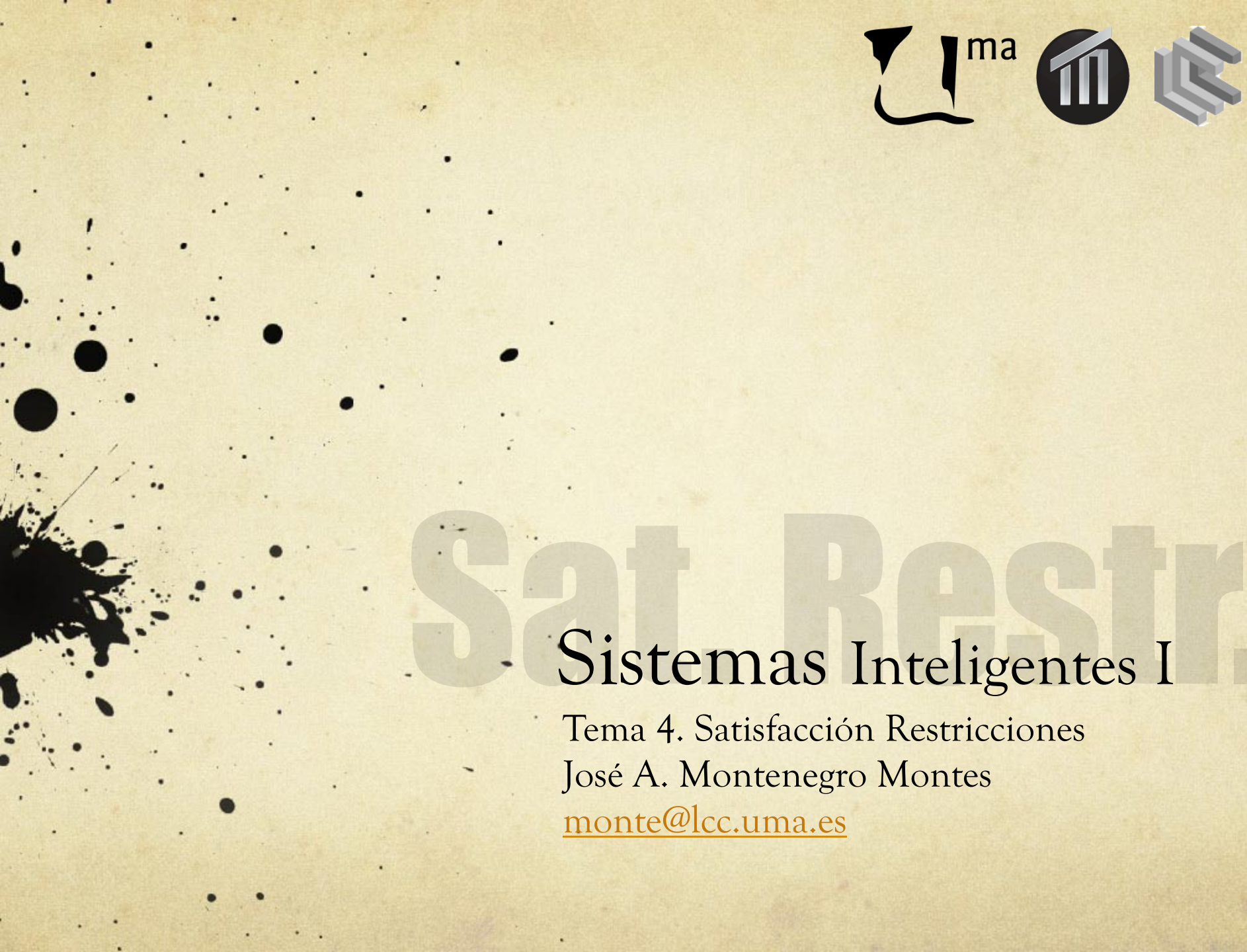


Sistemas Inteligentes I

Tema 4. Satisfacción Restricciones

José A. Montenegro Montes
monte@lcc.uma.es

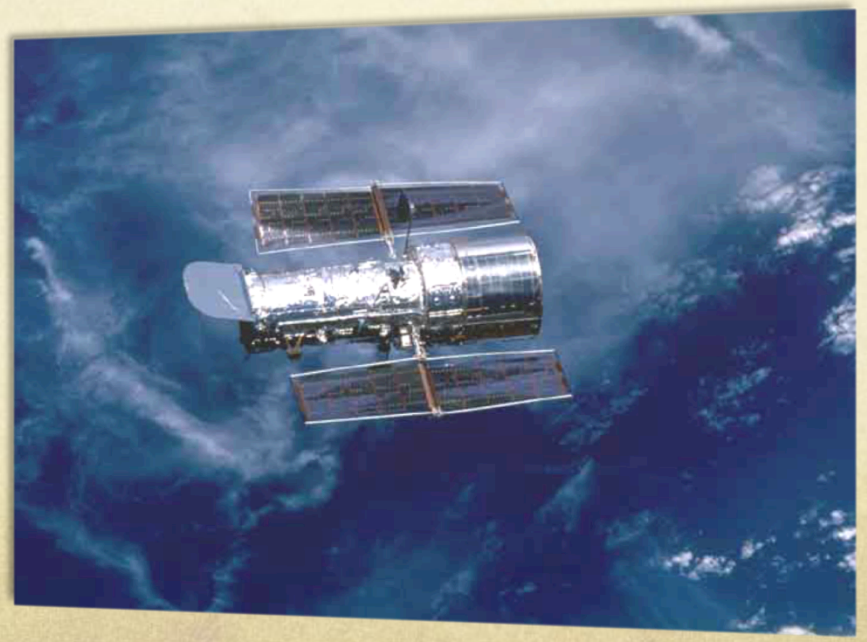
Resumen

- Introducción
- Definición del Problema y Ejemplos
- Restricciones y Consistencia
- Vuelta Atrás
- Conclusiones

Introducción

Motivación

- El telescopio espacial Hubble fue lanzado en 1990
- Podía observar objetos nunca antes vistos
- Muchos astrónomos estaban interesados en usarlo



Motivación

- Cada año había que planificar alrededor de 10.000-30.000 observaciones, cada una con varias restricciones operativas y científicas
  - **Científica:** sólo se puede observar un eclipse cuando está ocurriendo
  - **Operativa:** no puedes observar un objeto cuando está detrás de la Tierra
- El algoritmo de planificación inicial necesitaba 3 semanas para planificar una semana de observaciones

Representaciones factorizadas

- En los temas anteriores exploramos problemas que pueden resolverse buscando en un espacio de estados
- Cada **estado era atómico**, es decir, era una caja negra sin estructura interna
- Aquí emplearemos una representación factorizada para cada estado
  - Un conjunto de variables, cada una con su valor
  - Un problema está resuelto cuando cada variable tiene un valor que satisface todas las restricciones sobre dicha variable

Definición del Problema

y ejemplos

Definición (I)

- Un problema de satisfacción de restricciones (*constraint satisfaction problem*, CSP) está formado por tres componentes:
  - Un conjunto de **variables**, $X=\{X_1,...,X_n\}$
  - Un conjunto de **dominios**, uno para cada variable: $D=\{D_1,..., D_n\}$
  - Un conjunto de **restricciones** que especifican combinaciones permitidas de valores, C
- Cada dominio D_i es el conjunto de valores posibles $\{v_1,..., v_k\}$ para la variable v_i

Definición (II)

- Cada **restricción** C_i es un par <*scope*,*rel*> donde *scope* es la tupla de variables que intervienen en la restricción y *rel* es una relación que define los valores que dichas variables pueden tomar.

  - Por ejemplo, si las variables X_3 y X_5 deben tener valores distintos, podemos escribir esta restricción como $< (X_3,X_5), X_3 \neq X_5 >$

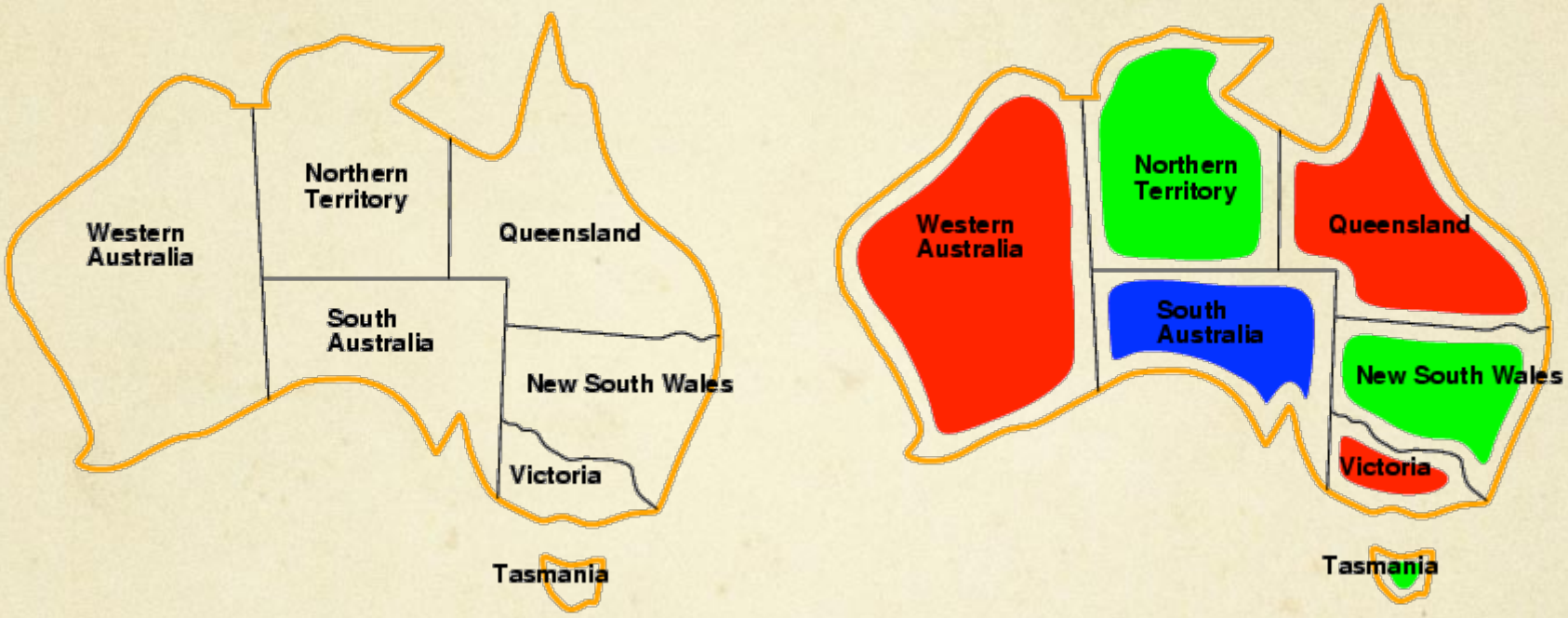
Definición (III)

- Cada estado de un CSP se define como una asignación de valores a algunas o a todas las variables, $\{X_i=v_i, X_j=v_j, \ldots\}$
- Una asignación que no viola ninguna restricción se llama asignación consistente o legal
- Si tenemos una asignación en la cual todas las variables están asignadas, la llamamos asignación completa. En otro caso, la llamamos asignación parcial.
- Una solución de un CSP es una asignación consistente y completa

Ejemplo 1: Coloreado de mapas

- La tarea consiste en colorear cada región de un mapa de tal manera que no haya regiones adyacentes que tengan el mismo color
- Para el mapa de Australia (siguiente transparencia), definimos las variables como X={*WA*, *NT*, *Q*, *NSW*, *V*, *SA*, *T*}
- El dominio de cada variable es D_i={*red*, *green*, *blue*}
- Hay nueve restricciones: C={*SA*≠ *WA*, *SA*≠ *NT*, *SA*≠ *Q*, *SA*≠ *NSW*, *SA*≠ *V* , *SA*≠ *V*, *WA*≠ *NT* , *NT*≠ *Q*, *Q*≠ *NSW*, *NSW*≠ *V*}

Ejemplo 1: Coloreado de mapas



- Ejemplo de solución completa y consistente:
  - WA = red, NT = green,Q = red,NSW = green,V = red,SA = blue,T = green

Ejemplo 2: problemas criptoaritméticos

- En un acertijo criptoaritmético, cada letra representa a un dígito distinto (0-9)

$$\begin{array}{cccc} & T & W & O \\ + & T & W & O \\ \hline F & O & U & R \end{array}$$

Ejemplo 2: problemas criptoaritméticos

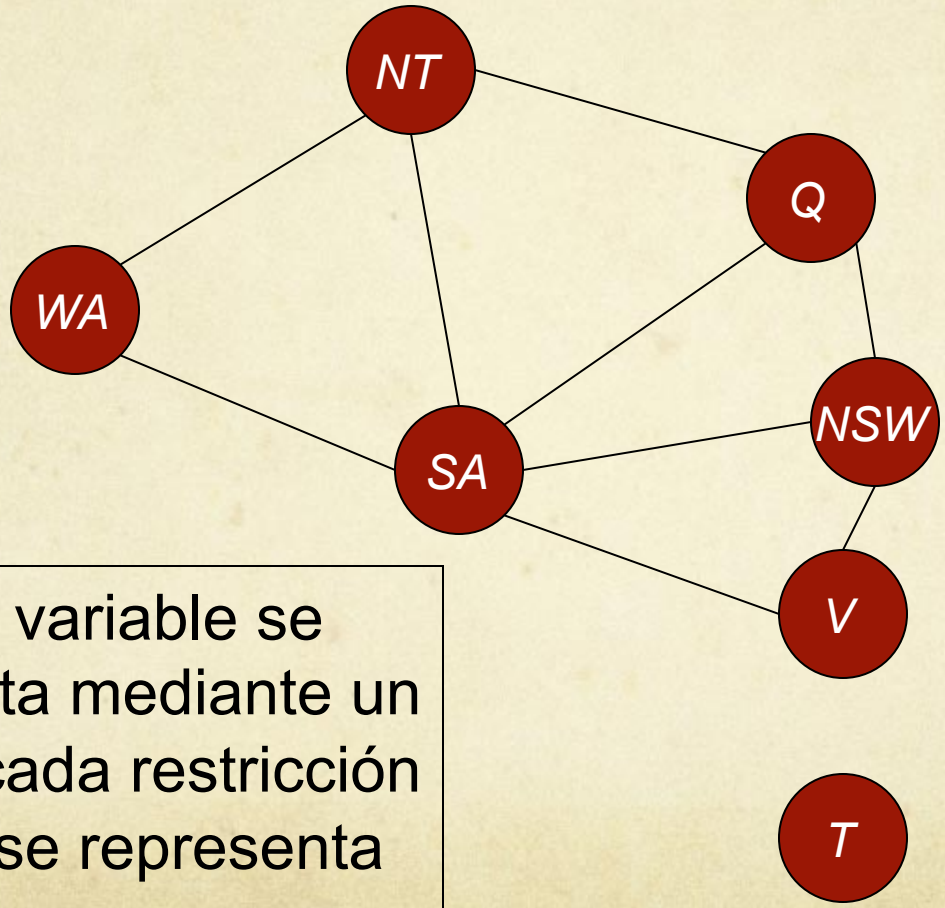
- El requisito de que todas las variables han de tomar diferentes valores se corresponde con la restricción *AllDiff*(*F*,*T*,*U*,*W*,*R*,*O*)
- Introducimos tres variables auxiliares C_{10}, C_{100} y C_{1000}, que representan los dígitos acarreados a las columnas de las decenas, las centenas y los millares, respectivamente
- De esta manera el resto de las restricciones son:
  - $O+O=R+10\cdot C_{10}$
  - $C_{10}+W+W=U+10\cdot C_{100}$
  - $C_{100}+T+T=O+10\cdot C_{1000}$
  - $C_{1000}=F$

Restricciones y Consistencia

Tipos de restricciones

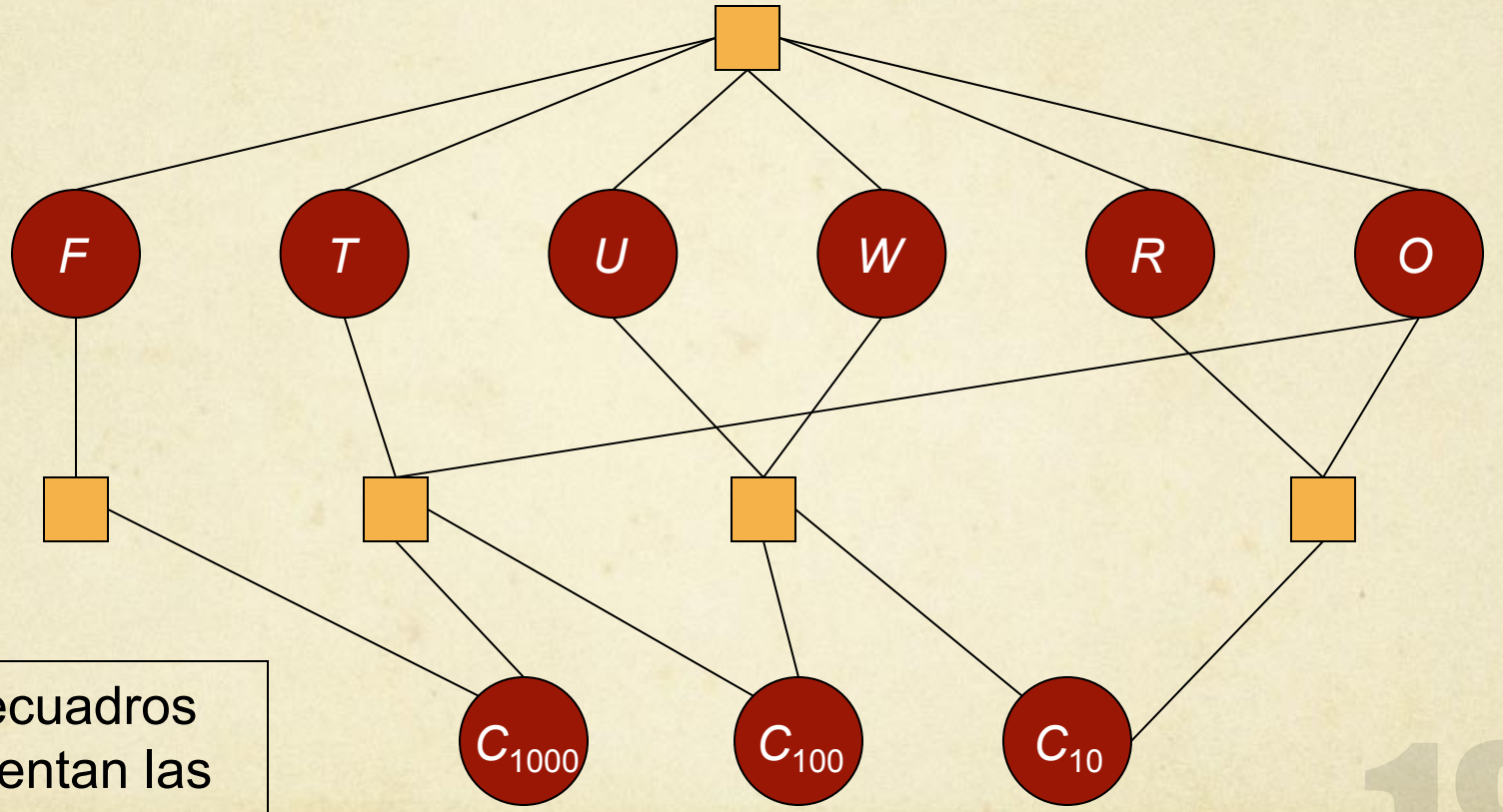
- Una **restricción unaria** restringe el valor de una sola variable
  - Por ejemplo, para imponer que *South Australia* no se coloree de verde escribimos $\langle(SA), SA \neq green\rangle$
- Una **restricción binaria** relaciona dos variables
  - Por ejemplo, $SA \neq NSW$
- Una restricción en la que participa un número arbitrario de variables se llama **restricción global**
  - Por ejemplo, $AllDiff(F,T,U,W,R,O)$

Grafo de restricciones



Cada variable se representa mediante un nodo, y cada restricción binaria se representa con un arco

Hipergrafo de restricciones



Los recuadros representan las restricciones globales

Consistencia de nodos

- Una variable es **nodo-consistente** si todos los valores del dominio de la variable satisfacen las **restricciones unarias** sobre dicha variable
  - Por ejemplo, si tenemos la restricción unaria <(*SA*),*SA*≠*green*>, podemos hacer *SA* nodo-consistente quitando *green* de su dominio, lo que deja a *SA* con el dominio reducido {*red*, *blue*}
- Siempre es posible eliminar todas las restricciones unarias de un CSP ejecutando la consistencia de nodos

Consistencia de arcos

- Una variable X_i es arco-consistente si, para cada valor del dominio de X_i y cada **restricción binaria** (X_i,X_j), podemos encontrar al menos un valor en el dominio de X_j que satisface la restricción
- Una red es arco-consistente si toda variable es arco-consistente con las demás variables
- El siguiente algoritmo asegura la arco-consistencia de la variable X_i con respecto a otra variable X_j ; devuelve *true* si y sólo si se ha revisado el dominio de X_i

Algoritmo de revisión de dominios

function Revise(*csp*, X_i, X_j)

revised ←*false*

for each *x* **in** D_i **do**

if ningún valor *y* en D_j hace que (*x*,*y*) satisfaga la restricción entre X_i y X_j **then**

borrar *x* de D_i

revised←*true*

return *revised*

Algoritmo AC-3 (I)

- El algoritmo más popular para asegurar la **arco-consistencia en una red** se llama AC-3
- Mantiene un conjunto de arcos que considerar
- Inicialmente el conjunto contiene todos los arcos del CSP
- A continuación extrae un arco cualquiera (X_i,X_j) del conjunto y hace X_i arco-consistente con respecto a X_j
  - Si esto reduce el dominio D_i, entonces añadimos al conjunto todos los arcos (X_k,X_i), tales que X_k es vecino de X_i
- Si un dominio se reduce a nada, entonces el CSP original no tenía solución, y devolvemos *false*. En otro caso obtenemos un CSP en el que es más fácil buscar

Algoritmo AC-3 (II)

function AC-3(*csp*)

set←AllArcs(*csp*)

while *set* no está vacío **do**

(X_i,X_j)←Extract(*set*)

if Revise(*csp*, X_i, X_j) **then**

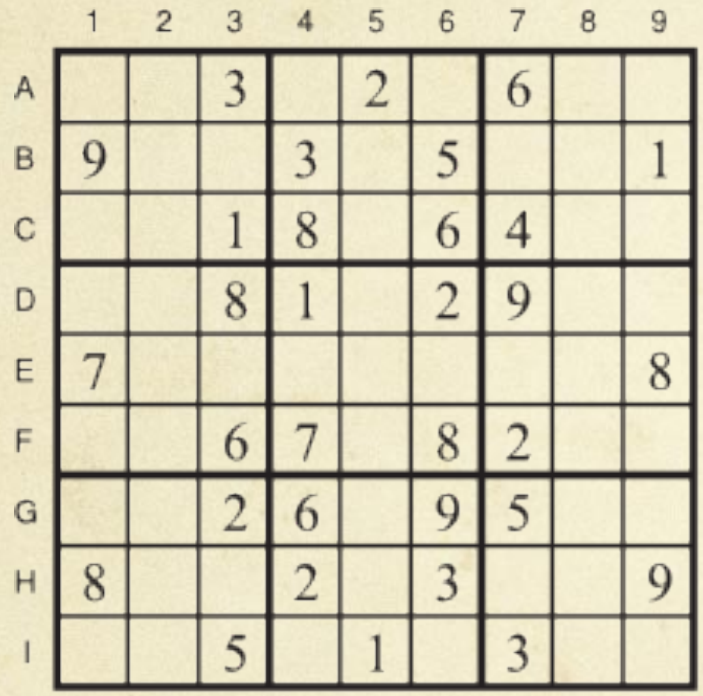
if size(D_i)=0 **then return** *false*

for each X_k **in** X_i.*Neighbors*-{X_j} **do**

añadir (X_k,X_i) a *set*

return *true*

Sudoku



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A			3		2		6		
B	9			3		5			1
C			1	8		6	4		
D			8	1		2	9		
E	7								8
F			6	7		8	2		
G			2	6		9	5		
H	8			2		3			9
I			5		1		3		

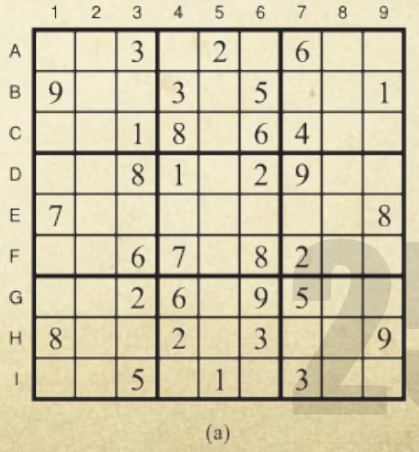
(a)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	4	8	3	9	2	1	6	5	7
B	9	6	7	3	4	5	8	2	1
C	2	5	1	8	7	6	4	9	3
D	5	4	8	1	3	2	9	7	6
E	7	2	9	5	6	4	1	3	8
F	1	3	6	7	9	8	2	4	5
G	3	7	2	6	8	9	5	1	4
H	8	1	4	2	5	3	7	6	9
I	6	9	5	4	1	7	3	8	2

(b)

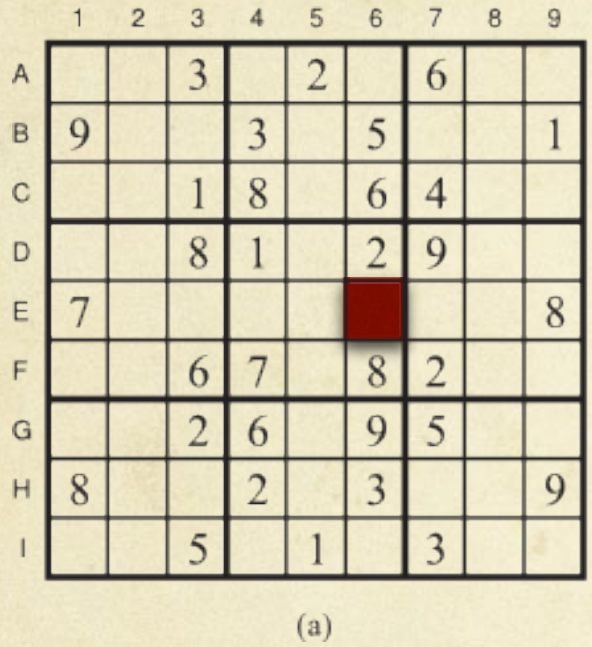
Sudoku

- Un sudoku es un CSP con 81 variables, una para cada casilla.
- Las casillas vacías tienen un dominio {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
  - Las casillas rellenas tienen un dominio con un único valor.
- Hay 27 Alldiff restricciones: una para cada fila, columna y casillas de 9 esquinas.
  - Alldiff (A1,A2,A3,A4,A5,A6,A7,A8,A9)
  - Alldiff (B1,B2,B3,B4,B5,B6,B7,B8,B9)
  - Alldiff (A1,A2,A3,B1,B2,B3,C1,C2,C3)
  - .....



(a)

Sudoku



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A			3		2		6		
B	9			3		5			1
C			1	8		6	4		
D			8	1		2	9		
E	7								8
F			6	7		8	2		
G			2	6		9	5		
H	8			2		3			9
I			5		1		3		

(a)

- Consideramos variable E6.
  - Casillas: Podemos eliminar 1,7,2,8 del dominio. $D_{casillas}$={3,4,5,6,9}
  - Columna: Podemos eliminar 5,6,2,8,9,3 del dominio. $D_{Columna}$={1,4,7}
  - Fila: Podemos eliminar 7 y 8 del dominio D_{Fila}={1,2,3,4,5,6,9}
- $Domino_{E6}$ ={4}

Vuelta Atrás

Algoritmo básico (I)

- Muchos CSPs no se pueden resolver solamente por inferencia sobre las restricciones; llega un momento en el que hay que buscar una solución
- La búsqueda por vuelta atrás es una búsqueda primero en profundidad que en cada momento elige un valor para una sola variable,
  - y vuelve atrás cuando una variable no tiene ningún valor legal que quede por probar
- Debemos considerar las siguientes preguntas:
  - ¿Qué variable debería ser asignada a continuación?
  - ¿En qué orden deberíamos probar sus valores?
  - ¿Qué inferencias deberían realizarse en cada paso?

Algoritmo básico (II)

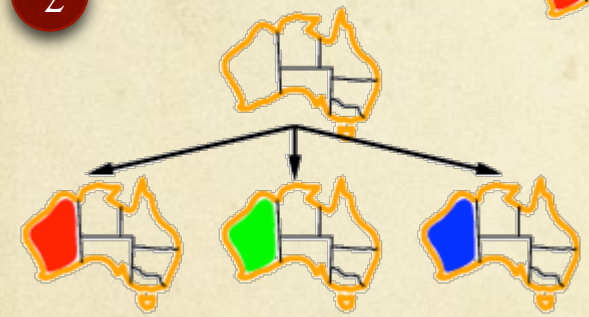
```
function Backtracking-search(csp)
    return Backtrack({},csp)

function Backtrack(assignment,csp)
    if assignment es completo then return assignment
    var←SelectUnassignedVariable(csp)
    for each value in OrderDomainValues(var,assignment,csp) do
        if value es consistente con assignment then
            añadir {var=value} a assignment
            inferences←Inference(csp,var,value)
            if inferences≠failure then
                añadir inferences a assignment
                result←Backtrack(assignment,csp)
                if result≠failure then return result
        quitar {var=value} e inferences de assignment
    return failure
```

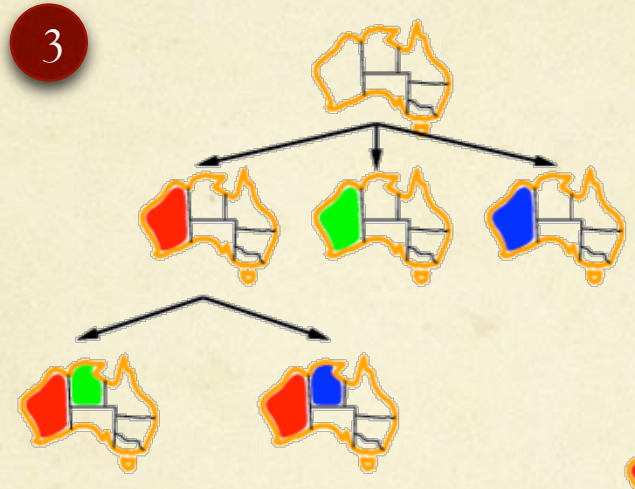
Ejemplo Algoritmo

1

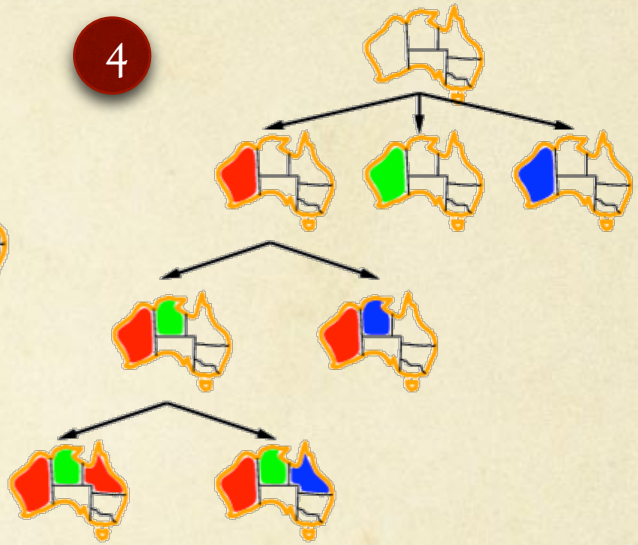
2



3



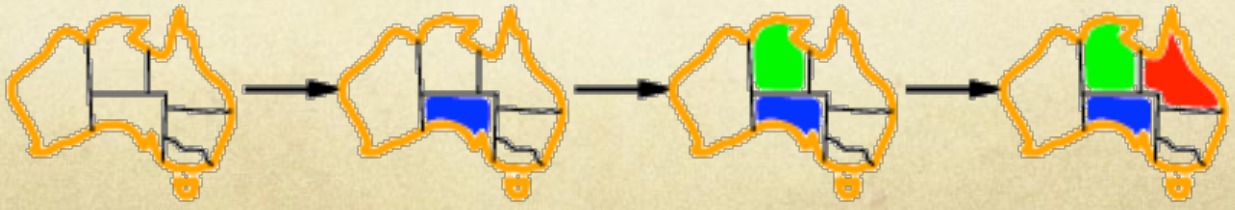
4



Ordenación de las variables

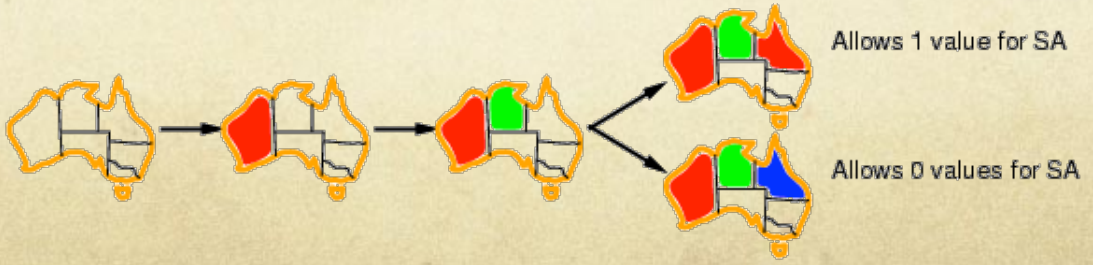
- Habitualmente se elige la variable que tenga el menor número de valores legales. Esto es lo que se llama el heurístico del mínimo número de valores restantes (*minimum remaining values heuristic*, MRV)

- A fin de romper los empates se puede emplear el heurístico del grado (*degree heuristic*, DEG), que elige la variable que interviene en el mayor número de restricciones con otras variables no asignadas
  - Esta manera de elegir las variables intenta obtener un fallo tan pronto como sea posible para podar secciones más grandes del árbol de búsqueda rápidamente



Ordenación de los valores

- En algunos casos el heurístico del valor menos restrictivo (*least constraining value*, LCV) puede resultar útil
- Prefiere el valor que elimina el menor número de opciones para las variables vecinas en el grafo de restricciones
- Este heurístico intenta obtener una solución tan pronto como sea posible eligiendo primero los valores más verosímiles



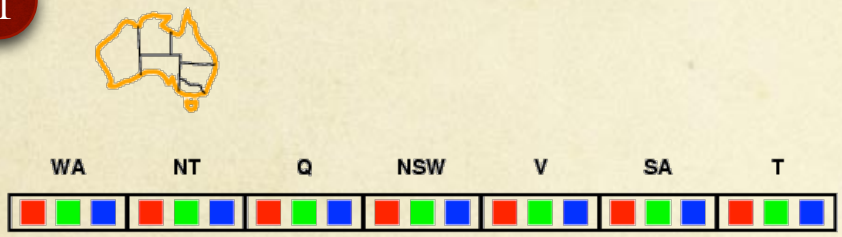
Intercalando búsqueda e inferencia

- Cada vez que hacemos una elección de un valor para una variable, intentamos inferir nuevas reducciones de dominio en las variables vecinas
- Una de las estrategias más sencillas es la comprobación hacia delante (*forward checking*)
  - Cada vez que se asigna una variable X, para cada variable no asignada Y que está conectada a X mediante una restricción, borramos del dominio de Y los valores que son inconsistentes con el valor elegido para X
- La comprobación hacia delante es inútil si ya hemos ejecutado la consistencia de arcos como procesamiento previo

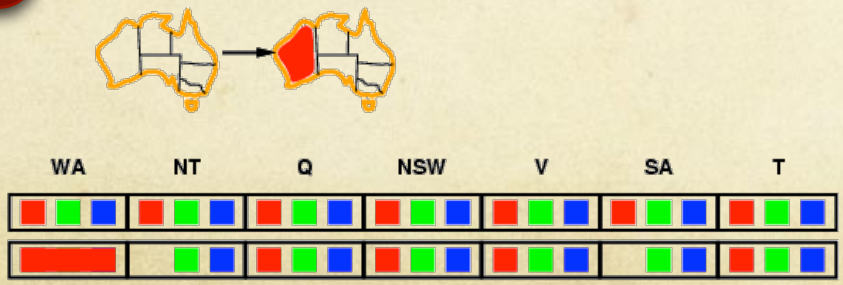
Intercalando búsqueda e inferencia

Forward checking

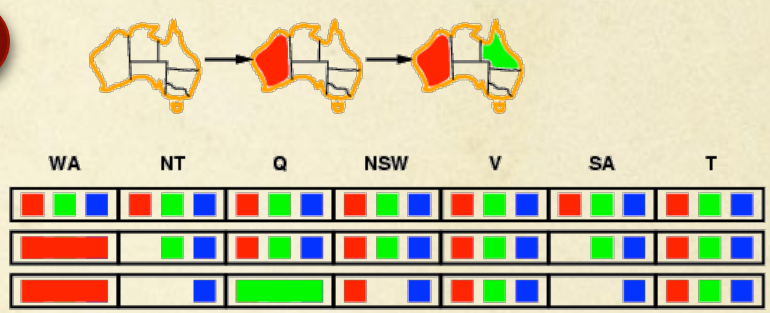
1



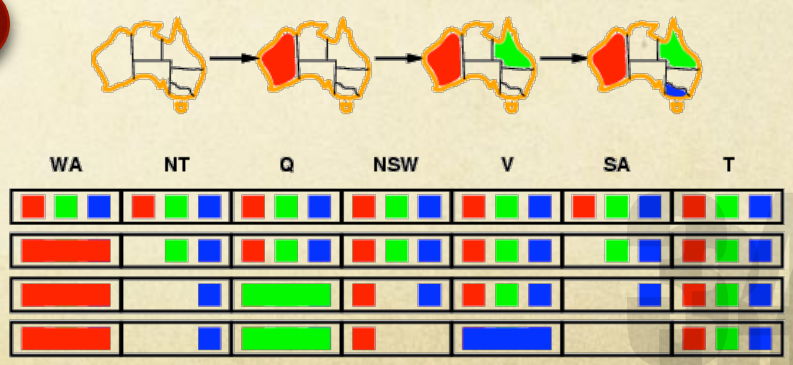
2



3



4



Sat. Restr.

Conclusiones

Sumario

- Los problemas de satisfacción de restricciones representan un estado mediante un conjunto de pares variable/valor y representan las condiciones que debe cumplir la solución mediante un conjunto de restricciones sobre las variables
- Las técnicas de inferencia usan las restricciones para inferir qué pares variable/valor son consistentes
- Habitualmente se emplea la búsqueda por vuelta atrás para encontrar una solución

Epílogo

- Empleando técnicas similares a las estudiadas en este tema, el tiempo de planificación semanal se redujo de tres semanas a 10 minutos (AIMA, p. 221)

Nebulosa planetaria NGC 2818, vista por el telescopio espacial Hubble.

Rojo = nitrógeno, verde = hidrógeno, azul = oxígeno

Sistemas Inteligentes

José A. Montenegro Montes

monte@lcc.uma.es

Ejercicios

Ejercicio 4

Ejercicio 4 (diseño de un horario):

El director de un instituto tiene que diseñar el horario de una clase.

Para simplificar vamos a suponer que el mismo horario se aplica a todos los días.

Hay seis horas, que deben rellenarse con estas asignaturas: Lengua, Inglés, Matemáticas, Física, Filosofía y Biología.

Ejercicio 4

- Hay algunas restricciones:
  - Las horas de Lengua e Inglés no pueden estar adyacentes, para que los alumnos no mezclen ambos idiomas.
  - Las Matemáticas no deben enseñarse a primera ni a última hora, para que los estudiantes estén lo suficientemente atentos.
  - La Física debe ir después de las Matemáticas.
  - La Filosofía sólo se puede asignar a la segunda o a la cuarta hora.

Ejercicio 4

- *Variables:*

Lengua, *Inglés*, *Matemáticas*, *Física*, *Filosofía* y *Biología* (una variable por asignatura).

- *Dominios:*

Lengua, *Inglés*, *Matemáticas*, *Física*, *Filosofía*, *Biología*$\in\{1, \ldots, 6\}$, donde los números representan las horas del horario.

Ejercicio 4

Restricciones:

- Dos asignaturas no se pueden enseñar al mismo tiempo a la misma clase, así que tendremos:

  $$AllDiff(Lengua, Inglés, Matemáticas, Física, Filosofía, Biología)$$

- También tendremos las restricciones correspondientes al enunciado del problema:

  a) $|Lengua - Inglés| > 1$

  b) $Matemáticas \notin \{1,6\}$

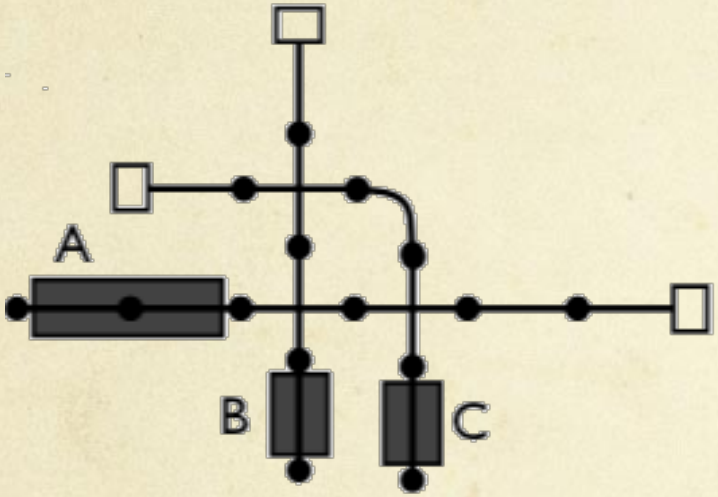
  c) $Física > Matemáticas$

  d) $Filosofía \in \{2,4\}$

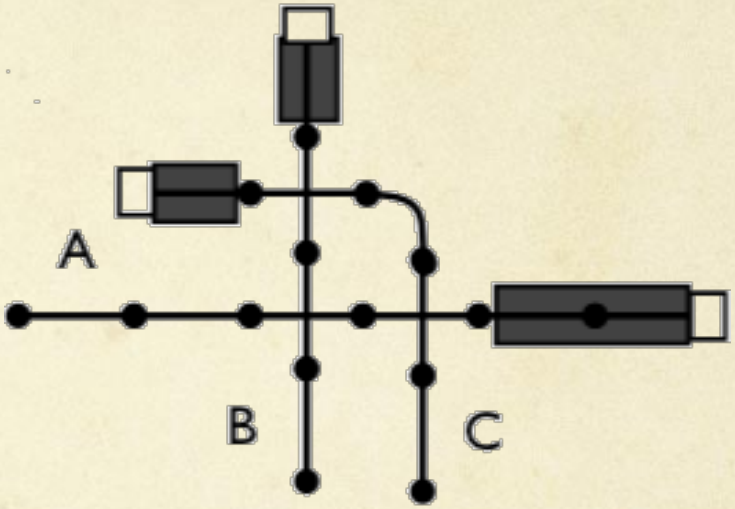
Ejercicio 7

- Un encargado de estación debe decidir cuando los trenes A, B y C deben partir. Una vez que los trenes han partido, se moverán un "hueco" en su vía a la hora hasta que llegue al destino.
  - Cada tren puede salir a las 1, 2 o 3 de la tarde.
  - Existen dos restricciones:
    - Todos los trenes deben salir en horas distintas y
    - Dos trenes no pueden ocupar a la vez los cruces de vías hasta que no pase una hora.
- Nótese que el tren A ocupa dos huecos. Además la restricción de colisión es impuesta solamente a la conclusión de cada hora, ya que consideramos en este problema el tiempo como variable discreta.

Ejercicio 7



Situación inicial



Situación final

Ejercicio 7

- *Variables y dominios:*

  Tendremos una variable por tren, almacenará su hora de salida: A, B, $C \in \{1, 2, 3\}$.

- *Restricciones:*

  1. Cada tren debe salir a una hora distinta:

     $$AllDiff(A,B,C) \Leftrightarrow (A \neq B) \wedge (B \neq C) \wedge (A \neq C)$$

  2. Restricciones de las intersecciones:

     $$(A+1 \neq B) \wedge (A+1 \neq C) \wedge (A+2 \neq C) \wedge (B \neq C+1)$$