Posible solución al examen de Investigación Operativa de Sistemas de junio de 2002

Problema 1 (3,5 puntos):

Resuelve el siguiente problema utilizando el método Simplex o variante:
Una compañía fabrica impresoras matriciales y láser. La demanda de ambos tipos de impresoras supera la capacidad de producción. La compañía está interesada en desarrollar una política de producción óptima.
Cada impresora matricial necesita 1 hora para su fabricación y 2 horas para su control de calidad, mientras que una láser necesita 1,5 y 1 horas, respectivamente. El número de horas de fabricación disponible por semana es de 200 y de control de calidad de 175. Los beneficios netos de venta de las impresoras son de 2.000 pts/unidad para las matriciales y de 3.000 pts/unidad para las láser.

a) Supongamos que la compañía desea minimizar el número total de impresoras producidas, con beneficio semanal de, al menos, 400.000 ptas. Formular el problema y resolverlo.
b) Si, por el contrario, se desea obtener el máximo beneficio, independientemente del número de unidades producidas, determinar cuál es el óptimo.

Nota: No se extrañe si aparecen valores óptimos no enteros para las variables de decisión.

Solución:

Apartado a)

Podemos modelar el problema como:

x_1 = nº de impresoras matriciales que hay que producir
x_2 = nº de impresoras láser que hay que producir

Minimizar $x_1 + x_2$
Sujeto a:
$x_1 + 1,5x_2 \leq 200$
$2x_1 + x_2 \leq 175$
$2x_1 + 3x_2 \geq 400$

$x_1, x_2 \geq 0$

Pasando a forma estándar queda (la variable x_6 es artificial):

Maximizar $-x_1 - x_2$
Sujeto a:
$x_1 + 1,5x_2 + x_3 = 200$
$2x_1 + x_2 + x_4 = 175$
$2x_1 + 3x_2 - x_5 + x_6 = 400$

$x_1, x_2 \geq 0$

La fase I del método se desarrolla como sigue:

			0	0	0	0	0	–1
Base	$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{P_0}$	$\mathbf{P_1}$	$\mathbf{P_2}$	$\mathbf{P_3}$	$\mathbf{P_4}$	$\mathbf{P_5}$	$\mathbf{P_6}$
P_3	0	200	1	1,5	1	0	0	0
P_4	0	175	2	1	0	1	0	0
P_6	–1	400	2	3	0	0	–1	1
		–400	–2	–3	0	0	1	0

Criterio de entrada: mín{–2,–3} = –3, luego entra x_2.
Criterio de salida: mín{400/3,175/1,200/1,5}=133,33, luego hay empate entre x_3 y x_6. Como x_6 es artificial, es preferible sacarla.

			0	0	0	0	0	–1
Base	$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{P_0}$	$\mathbf{P_1}$	$\mathbf{P_2}$	$\mathbf{P_3}$	$\mathbf{P_4}$	$\mathbf{P_5}$	$\mathbf{P_6}$
P_3	0	0	0	0	1	0	1/2	–1/2
P_4	0	125/3	4/3	0	0	1	1/3	–1/3
P_2	0	400/3	2/3	1	0	0	–1/3	1/3
		0	0	0	0	0	0	1

La tabla es óptima y el valor óptimo de la función objetivo es 0, con lo que pasamos a la fase II:

			–1	–1	0	0	0
Base	$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{P_0}$	$\mathbf{P_1}$	$\mathbf{P_2}$	$\mathbf{P_3}$	$\mathbf{P_4}$	$\mathbf{P_5}$
P_3	0	0	0	0	1	0	1/2
P_4	0	125/3	4/3	0	0	1	1/3
P_2	–1	400/3	2/3	1	0	0	–1/3
		–400/3	1/3	0	0	0	1/3

La tabla es óptima, y la solución es única:

Solución = (0, 400/3, 0, 125/3, 0)

Valor óptimo = 400/3

Es decir, que debemos producir 400/3 impresoras láser y ninguna matricial, a la semana.

Apartado b)

Podemos modelar el problema como:
x_1 = nº de impresoras matriciales que hay que producir
x_2 = nº de impresoras láser que hay que producir

Maximizar $2000x_1 + 3000x_2$

Sujeto a:

$x_1 + 1,5x_2 \leq 200$

$2x_1 + x_2 \leq 175$

$x_1, x_2 \geq 0$

Pasando a forma estándar queda:

Maximizar $2000x_1 + 3000x_2$
Sujeto a:
$x_1 + 1{,}5x_2 + x_3 = 200$
$2x_1 + x_2 + x_4 = 175$

$x_1, x_2 \geq 0$

			2000	3000	0	0
Base	**c_B**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**
P_3	0	200	1	1,5	1	0
P_4	0	175	2	1	0	1
		0	–2000	–3000	0	0

Criterio de entrada: mín{–2000,–3000} = –3000, luego entra x_2.
Criterio de salida: mín{200/1,5, 175/1} = 133,33, luego sale x_3.

			2000	3000	0	0
Base	**c_B**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**
P_2	3000	400/3	2/3	1	2/3	0
P_4	0	125/3	4/3	0	–2/3	1
		400000	0	0	2000	0

Tabla óptima, solución múltiple. La solución de esta tabla es: (0, 400/3, 0, 125/3). La otra tabla óptima es:

			2000	3000	0	0
Base	**c_B**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**
P_2	3000	675/6	0	1	1	–1/2
P_1	2000	125/4	1	0	–1/2	¾
		400000	0	0	2000	0

La solución de esta otra tabla es: (125/4, 675/6, 0, 0)

Por consiguiente, las infinitas soluciones de este problema son:

$$\sum_{i=1}^{K} \lambda_i \mathbf{x}_i \ ,$$

donde K=2, $\mathbf{x}_1$=(0, 400/3, 0, 125/3), $\mathbf{x}_2$=(125/4, 675/6, 0, 0), $\lambda_i \in [0,1], \sum_{i=1}^{K} \lambda_i = 1$

Problema 2 (3,25 puntos):

Un comercio nuevo está considerando instalar una mesa de información gestionada por un empleado. Basados en información obtenida de mesas de información similares, creemos que la gente llegará a la mesa a una tasa de 20 por hora. Se tarda un promedio de 2 minutos responder una pregunta. Se supone que las llegadas son Poisson y los tiempos de respuesta están exponencialmente distribuidos.

a) Encontrar la probabilidad de que el empleado esté desocupado.
b) Encontrar la proporción de tiempo que el empleado está ocupado.
c) Encontrar el número promedio de personas recibiendo información o esperando para ser informadas.
d) Encontrar el número promedio de personas esperando en la cola para obtener alguna información.
e) Encontrar el tiempo promedio que una persona pierde esperando en la cola para que se le responda una pregunta.
f) Supongamos que el empleado de la mesa de información gana 5 euros por hora. El costo del tiempo de espera, en términos del enfado del cliente con el comercio, es 12 euros por hora de tiempo esperando en la fila. ¿Cuáles son las pérdidas totales diarias, si el comercio abre 8 horas al día?

Solución:
Se trata de una cola M/M/1, con parámetros λ=20 llegadas/hora, μ=30 servicios/hora, $\rho=\lambda/\mu=2/3$

Apartado a)

$p_0 = 1 - \rho = 1 - 2/3 = 1/3$

Apartado b)

P(empleado ocupado) = $1 - p_0 = 1 - 1/3 = 2/3$

Apartado c)

Hay que hacer algunas operaciones con las fórmulas del formulario:

$$L = \lambda W = \lambda\left(W_q + \frac{1}{\mu}\right) = \lambda\left(\frac{L_q}{\lambda} + \frac{1}{\mu}\right) = L_q + \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho} + \rho = \frac{\left(2/3\right)^2}{1/3} + 2/3 = 2$$

Apartado d)

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\left(2/3\right)^2}{1/3} = \frac{4}{3}$$

Apartado e)

$$L_q = \lambda W_q \Rightarrow W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{4/3}{20} = \frac{1}{15} \text{ horas} = 4 \text{ minutos}$$

Apartado f)

Las pérdidas por el sueldo del empleado son: 5 €/hora · 8 horas/día = 40 €/día
Las pérdidas por clientes son: L_q · 12 €/ hora · 8 horas/día = 128 €/día
Las pérdidas totales son: 40 €/día + 128 €/día = 168 €/día

Problema 3 (3,25 puntos):

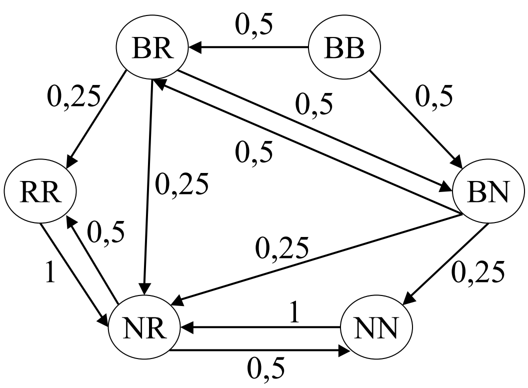
Una urna contiene actualmente 2 bolas de color blanco. Sucesivamente se realiza el siguiente experimento: se elige una bola arbitrariamente y se lanza una moneda. Si la bola elegida es de color blanco y el resultado de lanzar la moneda fuera cara, se pinta la bola de negro y se devuelve a la urna. Si la bola es de color blanco y el resultado de lanzar la moneda es cruz, se pinta la bola de rojo y se devuelve a la urna. Si la bola elegida es roja, independientemente del resultado de lanzar la moneda, se pinta de negro y se devuelve a la urna. Si la bola elegida es negra, independientemente del resultado de lanzar la moneda, se pinta de rojo y se devuelve a la urna.

a) Modele el estado de la urna como una Cadena de Markov.
b) Calcule la matriz de probabilidades de transición de estados.
c) Clasifique los estados.
d) Calcule la probabilidad de que, tras dos experimentos, en la urna haya una bola blanca y una roja.

Solución:

Apartado a)

Tendremos 6 estados, S = {BR, BB, BN, NN, NR, RR}. Cada uno de ellos representa un posible contenido de la urna. Cada vez que se hace un experimento, la cadena transita de un estado a otro. El diagrama de transición de estados (DTE) es:



Apartado b)

Siguiendo la ordenación de S del apartado a), tendremos:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Apartado c)

Estados recurrentes: RR, NR, NN
Estados transitorios: BR, BB, BN
Estados periódicos (periodo 2): RR, NR, NN, BR, BN
Estados aperiódicos: BB
Estados absorbentes: ninguno

Apartado d)

$$q^{(2)}_{BB,BR} = 0{,}5 \cdot 0 + 0 \cdot 0{,}5 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0{,}25$$