E.T.S.I. Informática. Ordinario de Setiembre 2009 APELLIDOS: **SOLUCIONES**

Lenguajes de Programación (tercer curso)

	1	2	3	4	5	total
PUNTOS:	1.5	1.5	2.5	2.5	2.0	10.0

$\boxed{\mathbf{1}}$ Demuestra la fórmula $[(P \vee (A \Rightarrow B)) \equiv (A \Rightarrow P \vee B)]$.

$\boxed{SOL}$ Una forma de resolverlo es directamente, *ptle*

$\quad (P \vee (A \Rightarrow B)) \equiv (A \Rightarrow P \vee B)$
$=\because [(A \Rightarrow B) \equiv (\neg A \vee B)]$
$\quad (P \vee (\neg A \vee B)) \equiv (\neg A \vee (P \vee B))$
$=\because$ conmutatividad y asociatividad del operador $\vee$
$\quad Cierto$

Otra forma es por aplicación del Lema 1.12(iv) [página 19 del libro de texto]:

$$(iv)[f.Cierto] \wedge [f.Falso] \Rightarrow [f.P]$$

tomando $f.P \doteq ((P \vee (A \Rightarrow B)) \equiv (A \Rightarrow P \vee B))$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Escribe un programa S indeterminista satisfaciendo $\{y > 0\}S\{y = 8\}$ $\quad \{y \leq 0\}S\{y = -10\}$. Prueba que efectivamente es indeterminista.

$\boxed{SOL}$ Tomamos el programa $\mathcal{M} \doteq [\![Cierto \to x := 1 \,\square\, Cierto \to x := 2]\!]$. Entonces es fácil demostrar que es indeterminista: $[\mathcal{M}.(x = 1) \equiv Falso]$, y $[\mathcal{M}.(x = 2) \equiv Falso]$, además de $[\mathcal{M}.(x = 1 \vee x = 2) \equiv Cierto]$ (véase por ejemplo ejercicio 4.19). Por otro lado es fácil demostrar: $[\mathcal{M}.(y = a) \equiv y = a]$. Y de aquí deducimos que el programa $S \doteq [\![y > 0 \to y := 8 \,\square\, y \leq 0 \to y := 10]\!] ; \mathcal{M}$ es una solución. Es indeterminista ya que:

$$[S.(x = 1) \equiv Falso] \qquad [S.(x = 2) \equiv Falso] \qquad [S.(x = 1 \vee x = 2) \equiv Cierto]$$

En efecto; veamos una de ellas:

$\quad S.(x = 1)$
$=\because$ definición de S
$\quad [\![y > 0 \to y := 8 \,\square\, y \leq 0 \to y := 10]\!] .\mathcal{M}.(x = 1)$
$=\because [\mathcal{M}.(x = 1) \equiv Falso]$
$\quad [\![y > 0 \to u := 8 \,\square\, y \leq 0 \to y := 10]\!] .Falso$
$=\because$ salubridad
$\quad Falso$

Veamos ahora por ejemplo el triplete $\{y > 0\}S\{y = 8\} \doteq [y > 0 \Rightarrow S.(y = 8)]$; comprobemos que $[y > 0 \equiv S.(y = 8)]$

$\quad S.(y = 8)$
$=\because$ definición de S
$\quad [\![y > 0 \to y := 8 \,\square\, y \leq 0 \to y := 10]\!] .\mathcal{M}.(y = 8)$
$=\because [\mathcal{M}.(y = a) \equiv y = a]$
$\quad [\![y > 0 \to y := 8 \,\square\, y \leq 0 \to y := 10]\!] .(y = 8)$
$=\because$ semántica binaria
$\quad y > 0 \wedge y := 8.(y = 8) \vee y \leq 0 \wedge y := 10.(y = 8)$
$=\because$ sustitución
$\quad y > 0 \wedge (8 = 8) \vee y \leq 0 \wedge (10 = 8)$
$=\because$ CP
$\quad y > 0$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Enuncia el Teorema de los Contadores Generalizados

$\boxed{SOL}$ Ver Teorema 8.43 [página 174], o mejor, el Corolario 8.46 [página 8.46]

Prueba la corrección del siguiente programa aplicando el teorema de los contadores generalizados:

$$
\begin{array}{l}
x, y, z, u := A, B, C, D; \\
*[\![\, x < u \to x, u := u, x \\
\quad y < u \to y, u := u, y \\
\quad z < u \to z, u := u, z \,]\!]\, \{u = \text{mín}(A, B, C, D)\}
\end{array}
$$

Para ello prueba que $t \doteq (u, z, y, x)$ es un contador generalizado para el invariante

$$I \doteq t \in \mathcal{C}$$

y para el conjunto bien construido $\mathcal{C} \doteq \mathcal{P}erm(A, B, C, D)$: Las permutaciones de la tupla sobre el conjunto $\mathbf{D}^4$, con el orden lexicográfico, siendo $A, B, C, D \in \mathbf{D}$).

Tengo que probar:, $\forall i$:

$1. - \mathcal{C}$ es bien construido $\qquad 2. - [I \wedge b_i \ \Rightarrow\ t \in \mathcal{C}]$

$3.[I \wedge b_i \ \Rightarrow\ S_i.I \wedge wdec(S_i, t)] \qquad 4. - [I \wedge \neg OB \ \Rightarrow\ u = \text{mín}(A, B, C, D)]$

1 es trivial ya que $\mathcal{C}$ es finito. 2 es trivial ya que $I \equiv t \in \mathcal{C}$. Para 3 probamos solamente uno de los casos (los demás se hacen igual).

$\quad wdec(x, u := u, x|t)$
$=\because$ Lema 6.43
$\quad (x, u := u, x.t) < t$
$=\because$ definición de t y sustitución
$\quad (x, z, y, u) < (u, z, y, x)$
$\Leftarrow$ orden lexicográfico
$\quad x < u$

Finalmente, veamos 4:
$\quad I \wedge \neg OB$
$=\because$ definición de I
$\quad (x, y, z, u) \in \mathcal{P}er(A, B, C, D) \wedge u \leq x, y, z$
$\Rightarrow$ definición de mínimo
$\quad u = \text{mín}(A, B, C, D)$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Sea el procedimiento recursivo

$$
m = [\![\quad \begin{array}{l} i > 100 \to nada \\ i \leq 100 \to i := i + 1; m; m \,]\!] \end{array}
$$

Traza una llamada al procedimiento m para los valores iniciales de $i = 101, 100, 99, \ldots$ ¿Qué puedes conjeturar sobre el comportamiento de m para estos valores?

$\boxed{SOL}$ Este ejercicio aparece resuelto en el libro: Ejemplo 9.13 [página 197]. Un estudio de la traza conduce a que m se comporta para tales valores como la sentencia $i := 101$.

Prueba, por inducción sobre k, $\forall k : k \leq 101 : \quad [\, i = k \wedge m.Z \quad \equiv \quad i = k \wedge \boxed{i := 101}.Z]$ (si algún alumno no deduce la fórmula le será facilitada con medio punto de penalización).

$\boxed{SOL}$ Probamos el caso base ($i = 101$).
$\quad i = 101 \wedge m.Z$
$=\because$ semántica llamada recursiva, y selectiva
$\quad i = 101 \wedge nada.Z$
$=\because$ def. de $nada$
$\quad i = 101 \wedge Z(i)$
$=\because$ por la regla de Leibniz se deduce $[i = k \wedge Z(i) \equiv^{\heartsuit} i = k \wedge Z(k)]$
$\quad i = 101 \wedge Z(101)$
$=\because$ def. sustitución
$\quad i = 101 \wedge i := 101.Z$

Probaremos ahora el paso inductivo: Así pues sea $k < 101$

$i = k \wedge m.Z$

$=\because$ semántica llamada recursiva, y selectiva

$i = k \wedge i := i + 1.m.m.Z$

$=\because$ def. de sustitución

$i := i + 1.(i = k + 1 \wedge m.m.Z)$

$=\because$ Hipótesis de inducción para $Z \leftharpoondown m.Z$

$i := i + 1.(i = k + 1 \wedge i := 101.(m.Z))$

$=\because$ sustitución, además de la equivalencia $i := i + 1; i := 101 \equiv i := 101$

$i = k \wedge i := 101.(m.Z)$

$=\because$ sustitución

$i = k \wedge i := 101.(i = 101 \wedge m.Z)$

$=\because$ caso base y sustitución dos veces

$i = k \wedge i := 101.Z$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Consideremos la lógica de Hoare estándar para un lenguaje sin bucles; es decir, con las reglas (ref), $(:=)$, $(;)$, (si) indeterminista. Interpreta y prueba la propiedad:

$$\forall S : S \in \mathcal{P}rog : \ (\forall Q :: \vdash_{\mathcal{H}} \{Falso\}S\{Q\})$$

$\boxed{SOL}$ El ejercicio coincide casi con el Ejemplo 5.6 [página 74], salvo que la regla para la selectiva indeterminista la tomaremos en la forma:

$$\frac{\{P \wedge a\}S\{Q\} \qquad \{P \wedge b\}T\{Q\}}{\{P \wedge (a \vee b)\}[\![\, a \rightarrow S \,\square\, b \rightarrow T \,]\!]\{Q\}}$$

La prueba para esta regla es muy similar a la del libro.

La interpretación: Es cierto que partiendo de cualquier estado satisfaciendo el predicado $Falso$ el programa S termina satisfaciendo Q, ya que no existe ningún estado inicial satisfaciendo $Falso$.