E.T.S.I. Informática. Segundo Parcial, 1 Diciembre 2005

Lenguajes de Programación (tercer curso)

APELLIDOS: **SOLUCIONES**

NOMBRE:

PUNTUACIONES:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**Total**
	2.0	1.0	1.5	1.5	2.0	1.0	1.0	10.0

□ si
□ no
} deseo que se publique mi calificación

---

1 Consideremos la lógica de Hoare con las reglas $(nada), (:=), (ref), (;), (si), (buc)$. Prueba la siguiente propiedad

$$\text{Si } \vdash_{\mathcal{H}} \{P\}S;T\{Q\} \text{ entonces existe un predicado } I \text{ tal } \vdash_{\mathcal{H}} \{P\}S\{I\}, \text{ además de } \vdash_{\mathcal{H}} \{I\}T\{Q\}$$

SOL La interpretación de la implicación es sencilla: Si la sentencia compuesta $S;T$ termina para cada estado inicial que satisfaga P, entonces S termina para cada uno de éstos estados, y es posible *capturar* todos sus posibles estados finales a través de cierto predicado I tal que es precondición suficiente también para la terminación de la sentencia T en las mismas condiciones Q (o estados finales posibles) que la sentencia compuesta.
Para probar la implicación anterior utilizaré la técnica ... inducción sobre la derivación. El triplete $t \doteq \{P\}S;T\{Q\}$ solo es posible inferirlo a partir de dos reglas: (;) y (ref). Si t ha sido inferido de la regla (;), tendremos en el antecedente de la regla cierto predicado I satisfaciendo $\{P\}S\{I\}$, además de $\{I\}T\{Q\}$, y por tanto este es el predicado buscado. Si t ha sido inferido de la regla (ref) es porque en el antecedente tendremos algo como :

$[P \Rightarrow P'] \wedge \{P'\}S;T\{Q'\} \wedge [Q' \Rightarrow Q]$
$\Rightarrow$ $\because$ HI existe un predicado I,
$[P \Rightarrow P'] \wedge \{P'\}S\{I\} \wedge \{I\}T\{Q'\} \wedge [Q' \Rightarrow Q]$
$\Rightarrow$ $\because$ regla de refinamiento dos veces
$\{P\}S\{I\} \wedge \{I\}T\{Q\}$

---

2 Sea $\mathcal{B}$ el cálculo obtenido al eliminar la regla (:=). ¿Es cierta la propiedad:

$$\vdash_{\mathcal{B}} \{P\}S\{Q\} \quad \Rightarrow \quad [P \Rightarrow Q] \quad ?$$

SOL Si intentamos una prueba por inducción sobre la derivación, veamos dónde está el problema. El triplete $t \doteq \{P\}S\{Q\}$ puede ser inferido a partir de cualquier regla, salvo (:=) que la hemos eliminado. El único caso base corresponde a la regla $(nada)$, para la cual P es igual sintácticamente a Q, y por tanto es cierta la conclusión $[P \Rightarrow Q]$. Si t ha sido inferido de la regla de la composición tendríamos en el antecedente

$\{P\}S_1\{I\} \wedge \{I\}S_2\{Q\}$, siendo $S \equiv S_1;S_2$
$\Rightarrow$ $\because$ HI dos veces
$[P \Rightarrow I] \wedge [I \Rightarrow Q]$
$\Rightarrow$ $\because$ transitividad
$[P \Rightarrow Q]$

Si t ha sido inferido de la regla (ref) es porque en el antecedente tendremos:

$[P \Rightarrow P'] \wedge \{P'\}S\{Q'\} \wedge [Q' \Rightarrow Q]$
$\Rightarrow$ $\because$ HI,
$[P \Rightarrow P'] \wedge [P' \Rightarrow Q'] \wedge [Q' \Rightarrow Q]$
$\Rightarrow$ $\because$ transitividad de la implicación
$[P \Rightarrow Q]$

Si t ha sido inferido de la regla para la selectiva es porque en el antecedente tendremos:

$\{P \wedge b\}S_1\{Q\} \wedge [P \wedge \neg b\}S_2\{Q\}$, siendo $S \equiv [\![\, b \rightarrow S_1 \,\square\, \neg b \rightarrow S_2 \,]\!]$
$\Rightarrow$ $\because$ HI dos veces,
$[P \wedge b \Rightarrow Q] \wedge [P \wedge \neg b \Rightarrow Q]$
$\Rightarrow$ $\because$ CP
$[P \Rightarrow Q]$

Finalmente, si t ha sido inferido de la regla del bucle no necesariamente se tiene la conclusión; por ejemplo, ya que es cierto $\vdash_{\mathcal{B}} \{x > 0\}nada\{x > 0\}$, entonces aplicando la regla del bucle podemos obtener $\vdash_{\mathcal{B}} \{x > 0\} * [\![\, x > 0 \rightarrow nada \,]\!] \{x > 0 \wedge x \leq 0\}$, pero sin embargo no necesariamente es cierta la implicación $[x > 0 \Rightarrow x > 0 \wedge x \leq 0]$ (esta implicación solamente es cierta para aquellos espacios de estado verificando ocurre $[x \leq 0]$).

En definitiva, si dejamos la regla del bucle, la implicación es falsa; si eliminamos también la regla del bucle, la implicación es cierta. La justificación es simple: si eliminamos estas dos reglas, los programas "no hacen nada", y por ello la precondición inicial asegura la final ya que las variables no se alteran. Si incluimos los bucles, existen bucles que no terminan y con tripletes correctos.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Enuncia el Teorema de los Contadores:

$\boxed{SOL}$ Véase libro, página 105.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Pretendemos demostrar que el siguiente programa computa la mediana $med(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5)$ de los datos $Q_1, \ldots, Q_5$, perteneciendo éstos a una estructura con una relación de orden total:

$$
\begin{array}{ll}
 & q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 := Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5; \\
*[\![& q_1 > q_3 \rightarrow q_3, q_1 := q_1, q_3 \\
\Box & q_2 > q_3 \rightarrow q_3, q_2 := q_2, q_3 \\
\Box & q_3 > q_4 \rightarrow q_3, q_4 := q_4, q_3 \\
\Box & q_3 > q_5 \rightarrow q_3, q_5 := q_5, q_3 \,]\!]\, \{q_3 = med(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5)
\end{array}
$$

Busca un invariante para probar la corrección vía el Teorema de los Contadores.

$\boxed{SOL}$ *Basta tomar* $I \doteq$ ... $(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5) \in Per(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5)$, siguiendo un esquema parecido al de la página 109 del libro. Por el teorema de los contadores podríamos obtener el triplete:

$$\{I\} * [\![\, q_1 > q_3 \rightarrow .... \,]\!]\, \{I \wedge q_1, q_2 \leq q_3 \leq q_4, q_5\}$$

Pero el predicado poscondición conduce a $q_3 = med(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5)$ ya que

(1) Si $q_1, q_2 \leq q_3 \leq q_4, q_5$ entonces $q_3 = med(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)$, y

(2) El invariante I asegura $med(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5) = med(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)$.

Luego bastará demostrar que el predicado I se satisface antes del bucle, lo cual es trivial ya que tenemos

$$\{(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5) \in Per(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5)\} q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 := Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 \{I\}$$

y al ser cierto el predicado precondición *ptle*, entonces la sentencia de inicialización conduce al invariante *ptle*.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Prueba que $t \doteq \delta_{1,3} + \delta_{1,4} + \delta_{1,5} + \delta_{2,3} + \delta_{2,4} + \delta_{2,5} + \delta_{3,4} + \delta_{3,5}$ es un contador, donde $\delta_{x,y} = \begin{cases} 1, & \text{si } q_x > q_y \\ 0, & \text{si } q_x \leq q_y \end{cases}$

$\boxed{SOL}$ *Hay que probar* ... las 3 condiciones del teorema de los contadores (cuadro de la página 109). La invariabilidad de I es muy fácil. La tercera $[I \wedge b_j \;\Rightarrow\; t > 0]$ es trivial. En efecto: Obsérvese que al ser t una suma de ceros o unos, siempre tendremos $[t \geq 0]$; y por otro lado, cada guarda obliga que cierto término δ de la suma $t \doteq \delta_{1,3} + \cdots + \delta_{3,5}$ sea positivo (por ejemplo, $[q_2 > q_3 \;\Rightarrow\; \delta_{2,3} = 1]$).

Veamos finalmente cada implicación $[b_j \;\Rightarrow\; wdec(S_j, t)]$. Por simetría basta probar una sola de éstas. Veamos por ejemplo $[q_2 > q_3 \;\Rightarrow\; wdec(q_3, q_2 := q_2, q_3 | t)]$; manipulemos, *ptle*, la parte derecha:

$$
\begin{array}{ll}
 & wdec(q_3, q_2 := q_2, q_3 | t) \\
\equiv & \because \text{ Lema 6.43} \\
 & \delta_{1,2} + \delta_{1,4} + \delta_{1,5} + \delta_{3,2} + \delta_{3,4} + \delta_{3,5} + \delta_{2,4} + \delta_{2,5} < \delta_{1,3} + \delta_{1,4} + \delta_{1,5} + \delta_{2,3} + \delta_{2,4} + \delta_{2,5} + \delta_{3,4} + \delta_{3,5} \\
\equiv & \because \text{ simplificando términos iguales} \\
 & \delta_{1,2} + \delta_{3,2} < \delta_{1,3} + \delta_{2,3} \\
\Leftarrow & \because \text{ si } q_2 > q_3, \text{ entonces } \delta_{3,2} = 0 \text{ y } \delta_{2,3} = 1 \\
 & q_2 > q_3 \wedge \delta_{1,2} < \delta_{1,3} + 1 \\
\equiv & \because [q_2 > q_3 \;\Rightarrow\; \delta_{1,2} \leq \delta_{1,3}](*), \text{ regla de oro} \\
 & q_2 > q_3
\end{array}
$$

La última implicación $(*)$ $[q_2 > q_3 \;\Rightarrow\; \delta_{1,2} \leq \delta_{1,3}]$ es muy fácil; supongamos $q_2 > q_3$; si $\delta_{1,2} = 0$ la desigualdad es trivial ya que $[\delta_{x,y} \geq 0]$; si $\delta_{1,2} = 1$ es porque $q_1 > q_2$, y junto a $q_2 > q_3$ conduce a $q_1 > q_3$, o lo que es lo mismo $\delta_{1,3} = 1$ y los dos miembros de la desigualdad son iguales a 1.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Aplica el teorema de los contadores para concluir que el programa calcula la mediana con un máximo de 8 intercambios, siendo además t el *mejor* contador.

$\boxed{SOL}$ Por el teorema de los contadores el programa termina siempre, y calcula la mediana. Puesto que el contador se decrementa en una unidad al menos conservándose positivo con la guarda del bucle, una cota del número de intercambios realizados viene dada por una cota del valor inicial del contador, que al tener 8 sumandos, verificará siempre $[t \leq 8]$. Además t el *mejor* contador ya que existen ejecuciones del bucle con 8 iteraciones. En efecto; por ejemplo, consideremos la situación inicial:

$$(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5) = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5) = (5, 4, 3, 2, 1)$$

y consideramos la siguiente tabla donde aparece la guarda seleccionada en cada ejecución del cuerpo del bucle, los valores de las variables y el valor de t:

guarda seleccionada	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	t
2	5	4	3	2	1	8
1	5	3	4	2	1	7
3	4	3	5	2	1	6
4	4	3	2	5	1	5
2	4	3	1	5	2	4
1	4	1	3	5	2	3
3	4	1	4	5	2	2
1	3	1	2	5	4	1
	2	1	3	5	4	0

$\boxed{\mathbf{7}}$ Demuestra que es posible obtener la mediana de $2N + 1$ datos de una estructura con una relación de orden total con a lo sumo $N(N + 1)$ intercambios.

$\boxed{SOL}$ En efecto. Consideremos $2N+1$ datos y el mismo número de variables. entonces, la prueba de la corrección del programa:

$$
\begin{array}{ll}
 & q_1, q_2, \ldots, q_{2N+1} := Q_1, Q_2, \ldots, Q_{2N+1}; \\
*[\![& q_1 > q_{N+1} \rightarrow q_{N+1}, q_1 := q_1, q_{N+1} \\
\square & q_2 > q_{N+1} \rightarrow q_{N+1}, q_2 := q_2, q_{N+1} \\
\square & \ldots \\
\square & q_N > q_{N+1} \rightarrow q_{N+1}, q_N := q_N, q_{N+1} \\
\square & q_{N+2} < q_{N+1} \rightarrow q_{N+1}, q_{N+2} := q_{N+2}, q_{N+1} \\
\square & q_{N+3} < q_{N+1} \rightarrow q_{N+1}, q_{N+3} := q_{N+3}, q_{N+1} \\
\square & \ldots \\
\square & q_{2N+1} < q_{N+1} \rightarrow q_{N+1}, q_{2N+1} := q_{2N+1}, q_{N+1}]\!] \, \{q_{N+1} = med(Q_1, \ldots, Q_{2N+1})\}
\end{array}
$$

puede hacerse en forma similar a la anterior. Ahora el contador deberá ser:

$$
\begin{array}{llll}
t \doteq & \delta_{1,N+1} & +\delta_{1,N+2} + \ldots & +\delta_{1,2N+1}+ \\
 & \delta_{2,N+1} & +\delta_{2,N+1} + \ldots & +\delta_{2,2N+1}+ \\
 & \delta_{N,N+1} & +\delta_{N,N+1} + \ldots & +\delta_{N-1,2N+1} \\
 & & +\delta_{N+1,N+2} + \ldots & +\delta_{N+1,2N+1}
\end{array}
$$

que contiene $(N + 1)N + N = (N + 2)N$ sumandos.